**1** 微分方程式

**(ア)** $(xy^2 - y)\,dx + dy = 0$

**(イ)** $(x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

**(ウ)** $(3x^2 - 2y)\,dx + (3y^2 - 2x)\,dy = 0$

**(エ)** $4xy\,dx - dy = 0$

について, 各問に答えなさい.

(1) **(ア)** ～ **(エ)** の中から, 変数分離形微分方程式をすべて選びなさい.

**(解答欄)**

変数分離形は **(エ)** のみである;

$$\textbf{(エ)} \iff \frac{dy}{y} = 4x\,dx.$$

【3 点】

(2) **(ア)** ～ **(エ)** の中から, 同次形微分方程式をすべて選びなさい.

**(解答欄)**

同次形は **(イ)** のみである;

$$\textbf{(イ)} \iff y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad f(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right)$$

【3 点】

(3) (2) で選んだものの中から 1 つ選び, $v = \dfrac{y}{x}$ とおくことにより, $v$ と $x$ の変数分離形微分方程式に変換しなさい.

$v = \dfrac{y}{x}$ とおくと, $y' = (xv)' = v + x\,v'$ となる. これらを **(イ)** に代入すると

$$\begin{aligned} & x^2 - (xv)^2 - 2x\cdot(xv)(v + x\,v') = 0 \\ \iff & x^2 - x^2v^2 - 2x^2v(v + x\,v') = 0 \\ \iff & x^2 - 3x^2v^2 - 2x^3v\,v' = 0 \\ \iff & v' = \frac{1 - 3v^2}{2xv} \\ \iff & \frac{2v}{1 - 3v^2}dv = \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

となり, これは $v$ と $x$ の変数分離形微分方程式である.

【4 点】

(4) **(ア)** ～ **(エ)** の中から, 線形微分方程式をすべて選びなさい.

**(解答欄)**

線形微分方程式は **(エ)** のみである;

$$\textbf{(エ)} \iff y' - 4x\,y = 0 \quad (P(x) = -4x, Q(x) = 0).$$

【3 点】

(5) **(ア)** ～ **(エ)** の中から, ベルヌーイの微分方程式をすべて選びなさい.

**(解答欄)**

ベルヌーイの微分方程式は **(ア)** のみである;

$$\textbf{(ア)} \iff y' - y = -xy^2 \quad (P(x) = -1, Q(x) = -x, n = 2).$$

【3 点】

(6) (5) で選んだものの中から 1 つ選び, $z = y^{1-n}$ とおくことにより, $z$ と $x$ の線形微分方程式に変換しなさい.

**(ア)** は $n = 2$ の場合のベルヌーイの微分方程式なので,
$z = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$ とおくと, $z' = -\dfrac{1}{y^2}y'$ である.
$y' = -y^2\,z'$ を **(ア)** に代入すると,

$$\begin{aligned} -y^2\,z' - y = -xy^2 &\iff z' + \frac{1}{y} = x \\ &\iff \boldsymbol{z' + z = x} \end{aligned}$$

となり, これは線形微分方程式である.

【4 点】

(7) **(ア)** ～ **(エ)** の中から, 完全微分方程式をすべて選びなさい.

**(解答欄)**

完全微分方程式は **(イ)** と **(ウ)** である.

$$\textbf{(イ)} : \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy)$$

$$\textbf{(ウ)} : \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2y) = -2 = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 - 2x)$$

【3 点】

(8) **(ア)～(エ)** の中から1つ選び，その一般解を求めなさい．ただし，線形微分方程式 $y'+P(x)\,y=Q(x)$，および完全微分方程式 $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ の一般解がそれぞれ

$$y=e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}dx+c\right),$$

$$\int_a^x P(x,y)\,dx+\int_b^y Q(a,y)\,dy=c$$

で与えられることを利用してよい．

選んだ微分方程式

**（解答欄）**

**（ア）** (6) で求めた線形微分方程式は，$P(x)=1,\ Q(x)=x$ の場合であるから，

$$\int P(x)\,dx=\int dx=x,$$

$$\int e^{\int P\,dx}Q(x)\,dx=\int e^x x\,dx=\int (e^x)'x\,dx$$

$$=x\,e^x-\int e^x(x)'\,dx=x\,e^x-e^x$$

より，一般解は $z=e^{-x}\left(x\,e^x-e^x+c\right)=\left(x-1+ce^{-x}\right)$ である．$z=\dfrac{1}{y}$ より，一般解は $\boldsymbol{1=y\left(x-1+ce^{-x}\right)}$．

**（イ）** (3) で求めた変数分離形の両辺を積分すると

$$\log x=\int\frac{2v}{1-3v^2}\,dv=-\frac{1}{3}\int\frac{(1-3v^2)'}{1-3v^2}\,dv$$

$$=-\frac{1}{3}\log(1-3v^2)+c=\log\frac{e^c}{\sqrt[3]{1-3v^2}}$$

となり，$x\sqrt[3]{1-3v^2}=e^c$ を得る．$v=\dfrac{y}{x}$ を代入し，式を整理すると，$\boldsymbol{x^3-3xy^2=C}\ (=e^{3c})$ を得る．

**（ウ）** 完全微分方程式の一般解の公式より，

$$c=\int_0^x P(t,y)\,dt+\int_0^y Q(0,t)\,dt$$

$$=\int_0^x (3t^2-2y)\,dt+\int_0^y (3t^2-2\times 0)\,dt$$

$$=\left[t^3-2yt\right]_0^x+\left[t^3\right]_0^y=x^3-2xy+y^3.$$

よって，一般解は $\boldsymbol{x^3-2xy+y^3=c}$ である．

**（エ）** 変数分離形として一般解を求める．

$$\int\frac{dy}{y}=\int 4x\,dx \iff \log y=2x^2+c$$

$$\iff y=e^{2x^2+c}=e^c\,e^{2x^2}.$$

よって，一般解は $\boldsymbol{y=C\,e^{2x^2}}$ である（$C=e^c$）．

【4点】

**2** 微分方程式

$$2(x^2+y)\,dx+x\,dy=0 \qquad (*)$$

について，次の問に答えなさい．

(1) $(*)$ が完全微分方程式ではないことを示しなさい．

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{2(x^2+y)\right\}=2\neq 1=\frac{\partial}{\partial x}x.$$

したがって，完全微分方程式ではない．

【4点】

(2) $\lambda=x$ が $(*)$ の積分因子であることを示しなさい．

$(*)$ の両辺に $x$ かけると，$2(x^3+xy)\,dx+x^2\,dy=0$ となる．このとき，

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{2(x^3+xy)\right\}=2x=\frac{\partial}{\partial x}(x^2)$$

となり，完全微分方程式となるので，$\lambda=x$ は $(*)$ の積分因子である．

【4点】

(3) 初期条件 $(x,y)=(1,2)$ を満たす特殊解を求めなさい．

(2) で求めた完全微分方程式の一般解を求める．一般解の公式より，

$$c=\int_0^x P(t,y)\,dt+\int_0^y Q(0,t)\,dt$$

$$=\int_0^x 2(t^3+ty)\,dt+\int_0^y 0^2\,dt$$

$$=2\left[\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}y\right]_0^x$$

$$=\frac{x^4}{2}+x^2y.$$

よって，一般解は $x^4+2x^2y=C\ (=2c)$ である．

【4点】

求める特殊解は，$x=1$ のとき $y=2$ なので，

$$1^4+2\times 1^2\times 2=C \qquad \therefore C=5.$$

よって，$\boldsymbol{x^4+2x^2y=5}$ である．

【1点】

**部分点**

- 【3点】の選択問題は，選ぶべきものを選んでいないとき，または該当しないものを選んでいるときは，選択肢一つにつき1点減点する．
- 【4点】の記述問題は，途中まで正しく計算できている場合は，2点加点する．