科 目 名 微分方程式　　**出 題 者 名** 佐藤 弘康

1 $f(t)=t^2+3t+2$ とおく．また，D を微分演算子とする．次の各問に答えなさい．

(1) $f(D)e^{2x}$ を求めなさい．

$$\begin{aligned} f(D)e^{2x} &= (D^2+3D+2)e^{2x} \\ &= \left(e^{2x}\right)'' + 3\left(e^{2x}\right)' + 2e^{2x} \\ &= (2e^{2x})' + 3\cdot 2e^{2x} + 2e^{2x} \\ &= 4e^{2x}+6e^{2x}+2e^{2x} \\ &= (4+6+2)e^{2x} = \boldsymbol{12e^{2x}}. \end{aligned}$$

【4 点】

(2) 微分方程式 $f(D)y=0$ の一般解を求めなさい．

$$f(t)=(t+1)(t+2)$$

より，補助方程式 $f(t)=0$ の解は $t=-2,-1$ である．よって，$f(D)y=0$ の一般解は

$$\boldsymbol{y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}}$$

である．【3 点】

(3) $\dfrac{1}{f(D)}[12e^{2x}]$ を求めなさい．

$f(2)=2^2+3\cdot 2+2=12\neq 0$ より，

$$\frac{1}{f(D)}[12e^{2x}] = 12\cdot\frac{1}{f(2)}[e^{2x}] = 12\cdot\frac{1}{12}e^{2x} = \boldsymbol{e^{2x}}.$$

【4 点】

2 定数係数線形微分方程式

$$y''-2y'+2y=2x^2-2 \qquad (*)$$

について以下の問に答えなさい．

(1) 線形同次微分方程式 $y''-2y'+2y=0$ の一般解を求めなさい．

補助方程式は

$$t^2-2t+2=0$$

で，解の公式より，解は $t=1\pm\sqrt{-1}$ である．
よって，一般解は $\boldsymbol{y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)}$．【3 点】

(2) 微分方程式 $(*)$ の特殊解をひとつ求めなさい．
なお，この微分方程式の特殊解が

$$y=ax^2+bx+c \quad (a,b,c \text{ は定数})$$

と書けることを利用してもよい．

$y=ax^2+bx+c$ を微分すると，

$$\begin{aligned} y' &= 2ax+b, \\ y'' &= 2a. \end{aligned}$$

よって，これらを $(*)$ に代入した式

$$2a-2(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=2x^2-2$$

つまり，

$$2ax^2+(-4a+2b)x+2a-2b+2c=2x^2-2$$

が成り立つ．両辺の係数を比較すると，

$$\begin{cases} 2a=2 & (x^2 \text{ の係数}) \\ -4a+2b=0 & (x \text{ の係数}) \\ 2a-2b+2c=-2 & (\text{定数項}) \end{cases}$$

であるから，この連立方程式を解くことにより

$$\boldsymbol{a=1,\quad b=2,\quad c=0}$$

を得る．【4 点】

(3) $(*)$ の一般解を求めなさい．

(1) の結果から，$y''-2y'+2y=0$ の一般解は $y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$．(2) の結果から，$(*)$ の特殊解は $y=x^2+2x$．よって，$(*)$ の一般解は

$$\boldsymbol{y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)+x^2+2x}$$

となることがわかる．【3 点】

3 定数係数線形微分方程式

$$y'' - 4y' + 4y = 25\sin x \qquad (**)$$

について次の問に答えなさい.

(1) 線形同次微分方程式 $y'' - 4y' + 4y = 0$ の一般解を求めなさい.

補助方程式は

$$t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$$

なので, 重解 $t = 2$ をもつ.
よって, 一般解は $\boldsymbol{y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}}$.【3 点】

(2) 微分方程式 $(**)$ の特殊解をひとつ求めなさい.
なお, この微分方程式の特殊解が

$$y = a\sin x + b\cos x \quad (a, b \text{ は定数})$$

と書けることを利用してもよい.

$y = a\sin x + b\cos x$ を微分すると,

$$\begin{aligned} y' &= a\cos x - b\sin x, \\ y'' &= -a\sin x - b\cos x. \end{aligned}$$

よって, これらを $(**)$ に代入した式

$$-a\sin x - b\cos x - 4(a\cos x - b\sin x) + 4(a\sin x + b\cos x) = 25\sin x$$

つまり,

$$(-a + 4b + 4a)\sin x + (-b - 4a + 4b)\cos x = 25\sin x$$

が成り立つ. 両辺の係数を比較すると,

$$\begin{cases} 3a + 4b = 25 & (\sin x \text{ の係数}) \\ -4a + 3b = 0 & (\cos x \text{ の係数}) \end{cases}$$

であるから, この連立方程式を解くことにより

$$\boldsymbol{a = 3, \quad b = 4}$$

を得る.【4 点】

(3) 微分方程式 $(**)$ の一般解を求めなさい.

(1) の結果から, $y'' - 4y' + 4y = 0$ の一般解は $y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$. (2) の結果から, $(**)$ の特殊解は $y = 3\sin x + 4\cos x$. よって, $(**)$ の一般解は

$$\boldsymbol{y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + 3\sin x + 4\cos x}$$

となることがわかる.【3 点】

4 2 階定数係数線形微分方程式

$$f(D)y = F(x)$$

の一般解が

$$y = c_1 e^{-x}\cos\sqrt{3}x + c_2 e^{-x}\sin\sqrt{3}x + e^{2x} + x \qquad (\dagger)$$

であるとき, 多項式 $f(t)$ および 関数 $F(x)$ を求めなさい. ただし, c_1, c_2 は任意定数とする.

$(\dagger)$ 式の任意定数を含む項が

$$c_1 e^{-x}\cos\sqrt{3}x + c_2 e^{-x}\sin\sqrt{3}x$$

であるから, これは補助方程式の解が虚数解 $t = -1 \pm \sqrt{3}i$ であることを意味している. つまり, 補助方程式は

$$0 = \{t - (-1 + \sqrt{3}i)\}\{t - (-1 - \sqrt{3}i)\} = t^2 + 2t + 4$$

より,

$$\boldsymbol{f(t) = t^2 + 2t + 4}$$

となることがわかる.【5 点】

一方, $(\dagger)$ 式の任意定数を含まない項 $e^{2x} + x$ は $f(D)y = F(x)$ の特殊解である. つまり,

$$\begin{aligned} F(x) &= f(D)[e^{2x} + x] \\ &= (D^2 + 2D + 4)[e^{2x} + x] \\ &= (2e^{2x} + 1)' + 2(2e^{2x} + 1) + 4(e^{2x} + x) \\ &= 4e^{2x} + 4e^{2x} + 2 + 4e^{2x} + 4x \\ &= \boldsymbol{12e^{2x} + 4x + 2} \end{aligned}$$

となる.【5 点】