科 目 名 応用数学 I-J　　出 題 者 名 佐藤 弘康

**1** 以下の文を読んで, (1)〜(5) に当てはまるもっとも適当なものを下の選択肢から選び, 丸で囲みなさい.

平面内の領域 $D$ の点 $(x,y)$ に対し, 実数 $z=f(x,y)$ が対応するとき, $f$ を $D$ 上の 2 変数関数といい, $D$ を $f$ の $\boxed{(1)}$ という. 点 $(x,y)$ が $D$ の範囲を動くとき, $z$ が取り得る範囲を $f$ の $\boxed{(2)}$ という. $\boxed{(1)}$ が明示的に与えられていない場合は, $f$ が定義可能な点 $(x,y)$ の全体の集合を $\boxed{(1)}$ と考えることとする.

2 変数関数

$$f(x,y)=\sqrt{3-x^2-y^2}$$

の $\boxed{(1)}$ は原点を中心とする半径 $\boxed{(3)}$ の円の $\boxed{(4)}$ であり, $\boxed{(2)}$ は $\boxed{(5)}$ である.

**(選択肢)**

(1) 区間 ・ 始域 ・ 終域・ 値域 ・ 定義域

(2) 区間 ・ 始域 ・ 終域・ 値域 ・ 定義域

(3) 1 ・ $\sqrt{3}$ ・ 3 ・ 9

(4) 内部 ・ 外部 ・ 円周

(5) 実数全体 ・ 正の実数全体 ・ $0\leqq z\leqq\sqrt{3}$
$0\leqq z\leqq 3$ ・ $z\geqq\sqrt{3}$ ・ $z\geqq 3$

(1) 定義域 (2) 値域 (3) $\sqrt{3}$ (4) 内部 (5) $0\leqq z\leqq\sqrt{3}$

【各 2 点】

**2** 次の関数 $f(x,y)$ について, 2 次までの偏導関数をすべて求めなさい.

(1) $f(x,y)=x^3-2xy^2+3y^3$

$$\begin{aligned}
f_x(x,y)&=3x^2-2y^2\\
f_y(x,y)&=-4xy+9y^2\\
f_{xx}(x,y)&=6x\\
f_{xy}(x,y)&=-4y\\
f_{yy}(x,y)&=-4x+18y
\end{aligned}$$

【各 1 点】

(2) $f(x,y)=e^{xy}$

$$\begin{aligned}
f_x(x,y)&=ye^{xy}\\
f_y(x,y)&=xe^{xy}\\
f_{xx}(x,y)&=y^2e^{xy}\\
f_{xy}(x,y)&=e^{xy}+xye^{xy}=(1+xy)e^{xy}\\
f_{yy}(x,y)&=x^2e^{xy}
\end{aligned}$$

【各 1 点】

**3** 以下は $1.98^4\times 3.01^3$ の近似値を計算する方法について述べた文章である. 空欄に当てはまる最も適切な式または数を解答欄に書きなさい.

$f(x,y)=\boxed{(1)}$ とおくと,

$$1.98^4\times 3.01^3=f(2+\boxed{(2)},3+\boxed{(3)})$$

である. ここで, $z=f(x,y)$ の全微分は

$$dz=4x^3y^3\,dx+3x^4y^2\,dy$$

であり, これは独立変数 $x,y$ の増分が $dx,dy$ のときの $z$ の増分を表している. $x=2$, $y=3$, $dx=\boxed{(2)}$, $dy=\boxed{(3)}$ とすると,

$$dz=\boxed{(4)}$$

となるので, 次の近似式

$$1.98^4\times 3.01^3=\boxed{(5)}+\boxed{(4)}$$

が得られる.

**(解答欄)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | | (2) | |
| (3) | | (4) | |
| (5) | | | |

(1) $x^4y^3$ (2) $-0.02$ (3) $0.01$ (4) $-12.96$
(5) $2^4\times 3^3(=432)$

【各 1 点】

**4** $x^2 - xy + y^2 = 3$ の陰関数を $y = f(x)$ とする．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

$F(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 3$ とおくと，

$$F_x(x,y) = 2x - y,$$
$$F_y(x,y) = -x + 2y$$

である．$y = f(x)$ は $F(x,y) = 0$ の陰関数なので，

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{2x-y}{-x+2y} = \boldsymbol{\frac{2x-y}{x-2y}}. \quad 【4 点】$$

(2) $f'(a) = 0$ を満たす $x = a$ と，$b = f(a)$ の組 $(a,b)$ をすべて求めなさい．

$f(a) = b$ とすると，

$$F(a,b) = a^2 - ab + b^2 - 3 = 0 \qquad (1)$$

が成り立つ．$f'(a) = 0$ ならば，(1) の結果より，

$$f'(a) = \frac{2a-b}{a-2b} = 0, \quad つまり， \quad 2a - b = 0 \qquad (2)$$

が成り立つ．(2) 式より $b = 2a$ を，(1) 式に代入すると

$$a^2 - a \times 2a + (2a)^2 - 3 = 0, \qquad \therefore\ a = \pm 1$$

を得る．ゆえに求める組は，$(a,b) = \mathbf{(1,2)}$，$\mathbf{(-1,-2)}$ である【4 点】．

(3) $f'(a) = 0$ を満たす $x = a$ に対し，$f''(a)$ の符号を調べ，$b = f(a)$ が極大値か極小値か，またはそのどちらでもないか判定しなさい．ただし，$F(x,y) = 0$ の陰関数の 2 階導関数が

$$y'' = -\frac{F_{xx}(x,y) + 2F_{xy}(x,y)\,y' + F_{yy}(x,y)(y')^2}{F_y(x,y)}$$

となることを用いてよい．

$f(a) = b$ かつ $f'(a) = 0$ ならば，

$$f''(a) = -\frac{F_{xx}(a,b)}{F_y(a,b)}$$

が成り立つ．

$$F_{xx}(x,y) = 2$$

より，

$$f''(x) = -\frac{2}{-x+2y} = \frac{2}{x-2y}.$$

$f''(1) = -\dfrac{2}{3} < 0$，$f''(-1) = \dfrac{2}{3} > 0$ なので，$\boldsymbol{b = 2}$ **は極大値**で【2 点】，$\boldsymbol{b = -2}$ **は極小値**である．【2 点】

（$a$ と $b$ の意味を正しく理解していない場合は各 1 点減点）

**5** 関数

$$f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 6$$

の極値をすべて求めなさい．

$f$ の偏導関数は

$$f_x = 6x^2 - 3y = 3(2x^2 - y),$$
$$f_y = -3x + 6y^2 = 3(2y^2 - x)$$

である．連立方程式 $f_x = f_y = 0$，すなわち

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 0 \\ 2y^2 - x = 0 \end{cases}$$

の解は $(x,y) = (0,0)$ と $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のみである【4 点】．なぜなら，連立方程式の 1 つ目の式を $y = 2x^2$ と変形し，これを 2 つ目の式に代入すると

$$8x^4 - x = 0 \iff x(8x^3 - 1) = 0$$
$$\iff x(2x-1)(4x^2 + 2x + 1) = 0$$
$$\therefore x = 0, \frac{1}{2}$$

これらの点で極値をとるか否か判定する．$f$ の 2 次偏導関数は

$$(A =)\ f_{xx} = 12x$$
$$(B =)\ f_{xy} = -3$$
$$(C =)\ f_{yy} = 12y$$

である．【1 点】

(i) $(x,y) = (0,0)$ のとき，

$$D(0,0) = B^2 - AC = (-3)^2 - 0 \times 0 = 9 > 0$$

であるから，この点で**極値はとらない**【4 点】．

(ii) $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき，

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = B^2 - AC = (-3)^2 - 6 \times 6 = -27 < 0$$

なので，この点で極値をとる．$A = 6 > 0$ より，この点で**極小値をとり**【2 点】，その値は

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 6 = \boldsymbol{-\frac{25}{4}}$$

である．【2 点】