科目名 数学 II-J　　出題者名 佐藤 弘康

**1** 次の文章中の空欄 (1) 〜 (10) に入る適切な言葉を **(ア)** 〜 **(チ)** の中から選びなさい（ただし，1 つの選択肢がただ 1 つだけの空欄に当てはまるとは限らないことに注意せよ）．また，空欄 (a)〜(e) に入る適切な**式**を書きなさい．

- 1 回の試行で，ある事象 $A$ が起こる確率を $p$ とする．この試行を $n$ 回独立に試行したとき，$A$ が $k$ 回起こる回数 $X$ は確率変数となる．この確率分布を二項分布といい，$B(n,p)$ で表す．$B(n,p)$ の期待値は $\boxed{\text{(a)}}$ で，分散は $\boxed{\text{(b)}}$ である．
- $X$ が二項分布 $B(n,p)$ に従うとき，$n$ が十分大きいとき，$X$ は近似的に $\boxed{\text{(1)}}$ 分布に従う．これを $\boxed{\text{(2)}}$ の定理という．
- $X_1, X_2, \ldots X_n$ を互いに独立で，同じ確率分布に従う確率変数とする．このとき，$n$ が十分大きければ，

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

は近似的に $\boxed{\text{(3)}}$ 分布に従う．これを $\boxed{\text{(4)}}$ 定理という．各 $X_i$ の期待値が $\mu$ で分散が $\sigma^2$ のとき，$\bar{X}$ の期待値は $\boxed{\text{(c)}}$ で，分散は $\boxed{\text{(d)}}$ である．

- 確率変数 $X$ の期待値を $\mu$，標準偏差を $\sigma$ とするとき，任意の $\lambda > 1$ に対し，

$$P(|X-\mu| \geqq \lambda\sigma) \leqq \frac{1}{\lambda^2}$$

が成り立つ．これを $\boxed{\text{(5)}}$ の定理という．また，余事象の確率を考えることにより，上の不等式は

$$P(|X-\mu| < \lambda\sigma) > \boxed{\text{(e)}}$$

と同値であることがわかる．

- 調査対象である集団（集合）$\Pi$ と，$\Pi$ の各要素の特性 $X$ の組 $(\Pi, X)$ を母集団という．この $X$ は確率変数として確率分布する．この確率分布を $\boxed{\text{(6)}}$ といい，$X$ の期待値を $\boxed{\text{(7)}}$，分散を $\boxed{\text{(8)}}$ という．
- $\Pi$ の全ての要素に対して，$X$ を調べることを $\boxed{\text{(9)}}$ という．しかし，$\Pi$ が非常に大きな集団であったり，無限である場合は $\boxed{\text{(9)}}$ は不可能である．$\Pi$ から選ばれた $n$ 個の要素の $X$ の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ から $(\Pi, X)$ 全体の情報を得る（推定する）ことを，$\boxed{\text{(10)}}$ という．

**(解答欄)** 【各 2 点】

(a)〜(e) に入る適切な式を書きなさい．

(a) $np$

(b) $np(1-p)$

(c) $\mu$

(d) $\dfrac{\sigma^2}{n}$

(e) $1 - \dfrac{1}{\lambda^2}$

(1)〜(10) に入る最も適切な言葉を下の **(ア)** 〜 **(チ)** から選びなさい．

(1) **(ア)**　(2) **(エ)**

(3) **(ア)**　(4) **(オ)**

(5) **(ウ)**　(6) **(チ)**

(7) **(サ)**　(8) **(シ)**

(9) **(キ)**　(10) **(カ)**

**(選択肢)**

**(ア)** 正規　**(イ)** ポアソン　**(ウ)** チェビシェフ
**(エ)** ラプラス　**(オ)** 中心極限
**(カ)** 標本調査　**(キ)** 全数調査　**(ク)** 国勢調査
**(ケ)** 標本　**(コ)** 標本抽出　**(サ)** 母平均
**(シ)** 母分散　**(ス)** 不偏分散　**(セ)** 標本分散
**(ソ)** 母集団　**(タ)** 数標識　**(チ)** 母集団分布

**2** 次の確率の値を求めなさい．ただし，$Z$ は標準正規分布に従う確率変数とし，$X$ は期待値 $\mu = 150$，分散 $\sigma^2 = 16$ の正規分布に従う確率変数とする．【各 5 点】

(1) $P(-0.97 \leqq Z \leqq 0)$

$$
\begin{aligned}
&= P(0 \leqq Z \leqq 0.97) \\
&= \Phi(0.97) \\
&= \mathbf{0.33398}.
\end{aligned}
$$

(2) $P(0.51 \leqq Z \leqq 2.22)$

$$
\begin{aligned}
&= P(0 \leqq Z \leqq 2.22) - P(0 \leqq Z < 0.51) \\
&= \Phi(2.22) - \Phi(0.51) \\
&= 0.48679 - 0.19497 \\
&= \mathbf{0.29182}.
\end{aligned}
$$

(3) $P(147.4 \leqq X \leqq 162.4)$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\frac{147.4-150}{4} \leqq \frac{X-150}{4} \leqq \frac{162.4-150}{4}\right) \\
&= P\left(-\frac{2.6}{4} \leqq Z \leqq \frac{12.4}{4}\right) = P\left(-0.65 \leqq Z \leqq 3.1\right) \\
&= P\left(-0.65 \leqq Z \leqq 0\right) + P\left(0 \leqq Z \leqq 3.1\right) \\
&= P\left(0 \leqq Z \leqq 0.65\right) + P\left(0 \leqq Z \leqq 3.1\right) \\
&= \Phi(0.65) + \Phi(3.1) \\
&= 0.24215 + 0.49903 = \mathbf{0.74118}.
\end{aligned}
$$

(4) $P(X \leqq 141.4)$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\frac{X-150}{4} \leqq \frac{141.4-150}{4}\right) \\
&= P\left(Z \leqq -\frac{8.6}{4}\right) = P\left(Z \leqq -2.15\right) \\
&= P\left(2.15 \leqq Z\right) \\
&= 0.5 - \Phi(2.15) \\
&= 0.5 - 0.48422 = \mathbf{0.01578}.
\end{aligned}
$$

**3** 表と裏の出る確率が同じである硬貨を 4000 回投げるときに，表が出る回数を $X$ とする．このとき，次の問に答えなさい．【各 5 点】

(1) $X$ は確率変数と考えられる．$X$ の期待値と分散の値を答えなさい．

$X$ は 二項分布 $B\left(4000, \frac{1}{2}\right)$ に従うので，期待値は，

$$\mu = 4000 \times \frac{1}{2} = \mathbf{2000},$$

分散は

$$\sigma^2 = 4000 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \mathbf{1000}$$

である．

- 片方だけ求めている場合は【2 点】
- ただし，(2) において，$X$ が $N(2000, 1000)$ に従うとして計算している場合は【5 点】．

(2) $X$ が近似的に正規分布に従うとして，表の出る回数が 2019 回以下となる確率を求めなさい．

$$
\begin{aligned}
P(X \leqq 2019) \approx& P(X \leqq 2019 + 0.5) \\
=& P\left(\frac{X-2000}{\sqrt{1000}} \leqq \frac{2019+0.5-2000}{\sqrt{1000}}\right) \\
=& P\left(Z \leqq \frac{19.5}{\sqrt{1000}}\right) \quad 【2 点】 \\
=& 0.5 + P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{19.5}{\sqrt{1000}}\right) \\
=& 0.5 + \Phi\left(\frac{19.5}{\sqrt{1000}}\right) \\
=& 0.5 + \Phi\left(0.195 \times \sqrt{10}\right) \\
=& 0.5 + \Phi\left(0.62\right) \\
=& 0.5 + 0.23237 = \mathbf{0.73237}. \quad 【5 点】
\end{aligned}
$$

**注意** 正規分布に近似して確率を求める際，±0.5 補正をしていない，または符号を間違えている場合は 2 点減点する．

**4** ある大学の学生 40 人を無作為に選び, 1 週間にテレビを何時間視るかを聞いたところ, 平均 18.2 時間, 標準偏差 5.4 時間だった. 大学生の 1 週間にテレビを視る時間 $X$ が標準偏差 $\sigma = 5.4$ 時間の正規分布に従うと考え, 平均視聴時間 $\mu$ の信頼度 95% と 99% の信頼区間をそれぞれ求めなさい.

40 人分の平均を $\bar{x}$ とおくと, これは $N(\mu, 5.4^2/40)$ に従う確率変数のひとつの現実値である. 信頼度 $\beta$ の信頼区間を

$$[\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon], \qquad \bar{x} = 18.2$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\beta =& P(\bar{x} - \varepsilon \leqq \mu \leqq \bar{x} + \varepsilon)\\ =& P(-\varepsilon \leqq \bar{x} - \mu \leqq \varepsilon)\\ =& P\left(-\frac{\varepsilon}{5.4/\sqrt{40}} \leqq \frac{\bar{x}-\mu}{5.4/\sqrt{40}} \leqq \frac{\varepsilon}{5.4/\sqrt{40}}\right)\\ =& 2P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\varepsilon}{5.4/\sqrt{40}}\right)\\ =& 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{5.4/\sqrt{40}}\right). \quad (【4 点】)\end{aligned}$$

信頼度 $\beta = 0.95$ のとき,

$$\begin{aligned}& \Phi\left(\frac{\varepsilon}{5.4/\sqrt{40}}\right) = \frac{0.95}{2} = 0.475\\ \iff & \frac{\varepsilon}{5.4/\sqrt{40}} = 1.96\\ \iff & \varepsilon = 1.96 \times \frac{5.4}{\sqrt{40}} = \frac{1.96 \times 5.4 \times \sqrt{10}}{2 \times 10} = 1.6735.\end{aligned}$$

よって, 信頼限度は $18.2 \pm 1.67$ であるから, 信頼区間は

$$\mathbf{[16.53, 19.87]}$$

である. 【5 点】

一方, 信頼度 $\beta = 0.99$ のとき,

$$\begin{aligned}& \Phi\left(\frac{\varepsilon}{5.4/\sqrt{40}}\right) = \frac{0.99}{2} = 0.495\\ \iff & \frac{\varepsilon}{5.4/\sqrt{40}} = 2.5758\\ \iff & \varepsilon = 2.5758 \times \frac{5.4}{\sqrt{40}} = \frac{2.5758 \times 5.4 \times \sqrt{10}}{2 \times 10} = 2.1992.\end{aligned}$$

よって, 信頼限度は $18.2 \pm 2.20$ であるから, 信頼区間は

$$\mathbf{[16.00, 20.40]}$$

である. 【5 点】

**5** 一定量の砂糖を袋につめる機械がある. この機械は袋につめる砂糖の重さが, $\mu = 100$ g, $\sigma = 5$ g の正規分布に従うよう調整されている. 機械が正しく調整されているか確かめるため, 9 個の袋を無作為に抽出して測ったら, 平均値 $\bar{x}$ が 102.4 g であった. この機械は正しく調整されているか, 有意水準 5% で検定しなさい.

(1) 帰無仮説 $H_0$ を「直径の平均は $\mu = 100$ g である」とする. 【1 点】

(2) 対立仮説 $H_1$ は「$\mu = \mu_1 \neq 100$ g である」. 【1 点】

(3) 9 個の標本平均 $X = \frac{1}{10}(X_1 + \cdots + X_{10})$ を考えると, これは $N(\mu, 5^2/9)$ に従う. 【1 点】

(4) 対立仮説の設定から, 両側検定する. よって, 棄却域は

$$P(|Z| > k) = 0.05 \text{ を満たす } Z \text{ の全体}$$

となる（ただし, $Z$ は $N(0,1)$ に従う確率変数）.

$$\begin{aligned}0.05 =& P(|Z| > k) = 2P(k < Z)\\ =& 2(0.5 - P(0 \leqq Z \leqq k)) = 2(0.5 - \Phi(k))\end{aligned}$$

$$\therefore \Phi(k) = 0.5 - \frac{0.05}{2} = 0.475$$

$$\therefore\ k = 1.96. \qquad 【3 点】$$

よって, 棄却域の不等式は

$$\begin{aligned}|Z| > 1.96 \iff & \left|\frac{\bar{X} - 100}{5/\sqrt{9}}\right| > 1.96\\ \iff & |\bar{X} - 100| > 1.96 \times \frac{5}{3} = 3.27\end{aligned}$$

である. つまり, 棄却域 $W$ は

$$|w - 100| > 3.27$$

を満たす $w$ の全体である.

(5) 今, サイズ 9 の実測値が 102.4 だが, これは

$$|102.4 - 100| = 2.4 < 3.27$$

より, 棄却域に含まれないので, **$H_0$ は採択される**. つまり, この機械は正しく調整されていると判断される. 【4 点】