問　次の微分方程式について各問に答えなさい．

選択肢 A

(ア) $(x-y)\,dx + dy = 0$

(イ) $(2x+3y)\,dx + (3x+1)\,dy = 0$

(ウ) $y(1-x^3y^2)\,dx + x\,dy = 0$

(エ) $y^2\,dx + x\,dy = 0$

(オ) $(x^2+y^2)\,dx - xy\,dy = 0$

(カ) $(3y^2+2xy)\,dx + (3xy+y)\,dy = 0$

1　$y = 2e^x + x + 1$ が **(ア)** の解であることを示しなさい．

微分方程式 **(ア)** は $x - y + y' = 0$ と書ける．この式の左辺に，$y = 2e^x + x + 1$ と，その微分 $y' = 2e^x + 1$ を代入すると

$$x - y + y' = x - (2e^x + x + 1) + (2e^x + 1) = 0$$

となるので，$y = 2e^x + x + 1$ が **(ア)** の解（特殊解）であることがわかる．【4 点】

（部分点：関数 y とその微分を代入して計算していれば，【2 点】を加点する）

2　**選択肢 A** の中から，変数分離形微分方程式をすべて選び，一般解を求めなさい．

変数分離形微分方程式は **(エ) のみ**である．【1 点】

(エ) は $-\dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dx}{x}$ と変形できる．よって，各辺を積分すると，

$$(\text{左辺}) = -\int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{y} + c_1,$$

$$(\text{右辺}) = \int \frac{dx}{x} = \log x + c_2.$$

よって，一般解は $\underline{1 = y(\log x + c)}$ である（ただし，$c = (c_2 - c_1)$ は任意の定数）．【3 点】

（部分点：軽微な計算間違いについては【1 点】減点する $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ (4) についても同様）

3　**選択肢 A** の中から，同次形微分方程式をすべて選び，$u = \dfrac{y}{x}$ と変換して，x と u の変数分離形微分方程式にしなさい．

同次形微分方程式は **(オ) のみ**である．【1 点】

(オ) は $xy\,y' = x^2 + y^2$ と書ける．両辺を xy で割ると，

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \qquad (\text{オ}')$$

となる．$u = \dfrac{y}{x}$ とおくと，$y' = (xu)' = u + x\,u'$ である．これらを (**オ**$'$) に代入すると

$$u + x\,u' = \frac{1}{u} + u \iff xu' = \frac{1}{u}$$

$$\iff \underline{u\,du = \frac{1}{x}\,dx}$$

となり，これは x と u に関する変数分離形微分方程式である．【3 点】

4　**選択肢 A** の中から，線形微分方程式をすべて選びなさい．

線形微分方程式は **(ア)**，**(イ)**，**(カ)** の 3 つである．【4 点】

(ア) $y' - y = -x$

(イ) $y' + \dfrac{3}{3x+1}y = -\dfrac{2x}{3x+1}$

(カ) $y' + \dfrac{3}{3x+1}y = -\dfrac{2x}{3x+1}$

（部分点：正答 1 つのみ，または正答 2 つと誤答 1 つを選択した場合は【2 点】を，正答 2 つのみ選択した場合は【3 点】を加点する）

5　**選択肢 A** の中から，変数分離形でも線形でもないベルヌーイの微分方程式をすべて選び，$u = y^{1-n}$ と変換して，u に関する線形微分方程式にしなさい．

問題の条件を満たすベルヌーイの微分方程式は **(ウ) のみ**である．【1 点】

(ウ) は

$$y' + \frac{1}{x}y = x^2y^3 \qquad (\text{ウ}')$$

と書けるので，$n = 3$ の場合のベルヌーイの微分方程式である．$u = y^{1-3} = \dfrac{1}{y^2}$ とおくと，$u' = -\dfrac{2}{y^3}y'$，すなわち $y' = -\dfrac{y^3}{2}u'$ となる．これを (**ウ**$'$) に代入すると，

$$-\frac{y^3}{2}u' + \frac{1}{x}y = x^2y^3 \iff u' - \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y^2} = -2x^2$$

$$\iff \underline{u' - \frac{2}{x}u = -2x^2}$$

となり，これは u に関する線形微分方程式である．【3 点】

6 次の文章を読んで, (1)〜(5) の各問に答えなさい.

微分方程式

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (*)$$

が, ある関数 $u(x,y)$ に対して, 条件

(a) $\boxed{\boldsymbol{P(x,y)}} = u_x(x,y)$,

(b) $\boxed{\boldsymbol{Q(x,y)}} = u_y(x,y)$

を満たすとき, $(*)$ を (c) **完全** 微分方程式という. これは, $(*)$ の左辺が, $u(x,y)$ の (d) **全微分** に等しいことを意味している. また, この条件は

(e) $\boxed{\boldsymbol{P_y(x,y)}} =$ (f) $\boxed{\boldsymbol{Q_x(x,y)}}$

が成り立つことと同値である. **選択肢 A** の中で (c) 微分方程式は, (記号) **(イ)** のみである.

微分方程式 $(*)$ が (c) 微分方程式のとき, 一般解は

$$\int_a^x P(t,y)\,dt + \int_b^y Q(a,t)\,dt = c$$

で与えられる（ただし, c は任意の定数）.

微分方程式 $(*)$ が (c) ではないが, ある関数 $\lambda = \lambda(x,y)$ を $(*)$ の両辺に (g) **かけた** 微分方程式が (c) 微分方程式になる場合がある. このとき, 関数 λ のことを $(*)$ の (h) **積分因子** という.

(i) 微分方程式 **(カ)** の (h) は $\lambda = \dfrac{1}{y}$ である.

(1) 空欄 (a)〜(h) を適切な言葉または数式で埋めて, 文章を完成させなさい. ただし, (e) と (f) に入る数式の順番は問わない.

正答は上の空欄内を見よ.【各 1 点】

(2) 空欄 (記号) にあてはまる微分方程式を**選択肢 A** の中から選びなさい.

正答は上の空欄内を見よ.【2 点】

(3) 下線 (i) の主張を示しなさい.

(カ) の両辺に $\dfrac{1}{y}$ をかけると

$$(3y+2x)\,dx + (3x+1)\,dy = 0 \qquad (\text{カ}')$$

となる. $P(x,y) = 3y+2x$, $Q(x,y) = 3x+1$ とおくと, (カ$'$) は, $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ と書くことができ, さらに

$$P_y(x,y) = 3 = Q_x(x,y)$$

が成り立つので (カ$'$) は完全微分方程式である. 以上のことから, $\lambda = \dfrac{1}{y}$ が **(カ)** の積分因子であることがわかる.【3 点】

(4) **(カ)** の一般解を求めなさい.

完全微分方程式 (カ$'$) の一般解を求める. 公式より,

$$\int_0^x P(t,y)\,dt + \int_0^y Q(0,t)\,dt = c$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^x (3y+2t)\,dt + \int_0^y (3\cdot 0+1)\,dt = c$$

$$\Longleftrightarrow [3yt+t^2]_0^x + [t]_0^y = c$$

$$\therefore \underline{3xy + x^2 + y = c}. \quad 【4 点】$$

(5) **(カ)** の特殊解で, 初期条件 $(x,y) = (0,0)$ を満たすものを求めなさい.

(4) で求めた **(カ)** の一般解に, $x = y = 0$ を代入すると

$$3\cdot 0\cdot 0 + 0 + 0 = c \qquad \therefore c = 0.$$

よって, 求める特殊解は, $\underline{3xy + x^2 + y = 0}$ である.【3 点】

（部分点：定数 c の値を求めているだけの場合は【1 点】を加点する）