科 目 名 応用数学 II-J 出 題 者 名 佐藤 弘康

1 次の微分方程式の中から, **定数係数線形同次微分方程式**をすべて選びなさい.

(ア) $y''' - 2y'' + 8y = x^2 - 1$ ←同次でない

(イ) $y'' + 5xy' - 6y = 0$ ←線形同次だが定数係数でない

(ウ) $y'' - 3y' - y = 0$

(エ) $y'' + 7y' - 6y = 2$ ←同次でない

(解答欄) **(ウ)** 【4 点】

2 次の空欄 (1)(2) を適切な式で埋めなさい. また, (3) の 3 つの選択肢の中から適切なものを選び丸で囲みなさい.

$f(t) = t^2 - 2t - 3$ に対し,

$$f(D)[x^2 - 3] = \boxed{(1)\quad -3x^2 - 4x + 11}$$

である. よって, $y = x^2 - 3$ は微分方程式

$$\boxed{(2)\quad y'' - 2y' - 3y = -3x^2 - 4x + 11}$$

の (3) 一般・特殊・特異 解である. 【各 2 点】

3 次の定数係数線形同次微分方程式の一般解を求めなさい.

【各 5 点】

(1) $y'' - 7y' + 12y = 0$

補助方程式は $0 = t^2 - 7t + 12 = (t-3)(t-4)$ となり, これは異なる 2 つの実数解 $t = 3, 4$ をもつので, 一般解は

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}}$$

となる.

(2) $y'' - 2y' + 4y = 0$

補助方程式は $0 = t^2 - 2t + 4$ となり, これは実数解を持たず, 解は $t = 1 \pm \sqrt{3}i$ である. よって, 一般解は

$$\boldsymbol{y = e^{x}(c_1 \sin\sqrt{3}x + c_2 \cos\sqrt{3}x)}$$

である.

4 次を求めなさい. 【各 5 点】

(1) $\dfrac{1}{D^2 + D + 6}e^{2x}$

$$= \frac{1}{2^2 + 2 + 6}e^{2x} = \boldsymbol{\frac{1}{12}e^{2x}}.$$

(2) $\dfrac{1}{D^2 + D - 6}e^{2x}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(D-2)(D+3)}e^{2x} = \frac{1}{D-2}\cdot\frac{1}{D+3}e^{2x} \\
&= \frac{1}{D-2}\cdot\frac{1}{2+3}e^{2x} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{D-2}e^{2x} \\
&= \frac{1}{5}e^{2x}\int e^{-2x}e^{2x}\,dx = \frac{1}{5}e^{2x}\int dx = \boldsymbol{\frac{1}{5}x\,e^{2x}}.
\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{D+3}\cdot\frac{1}{D-2}e^{2x} = \frac{1}{D+3}\cdot e^{2x}\int e^{-2x}e^{2x}\,dx \\
&= \frac{1}{D+3}\cdot e^{2x}\int dx = \frac{1}{D-(-3)}\cdot e^{2x}x \\
&= e^{-3x}\int e^{3x}e^{2x}x\,dx = e^{-3x}\int e^{5x}x\,dx \\
&= \frac{1}{5}e^{-3x}\int (e^{5x})'\,x\,dx = \frac{1}{5}e^{-3x}\left(e^{5x}x - \int e^{5x}dx\right) \\
&= \frac{1}{5}e^{-3x}\left(e^{5x}x - \frac{1}{5}e^{5x}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{25}e^{2x}(5x-1)}
\end{aligned}$$

でもよい.

5 定数係数線形微分方程式

$$y'' - 4y' + 4y = \sin x \qquad (*)$$

の一般解を求めなさい．なお, $(*)$ の特殊解が

$$y = a\sin x + b\cos x, \quad (a, b \text{ は定数})$$

となることを利用してもよい．

まず, $(*)$ の右辺を 0 とした同次方程式

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

の一般解を求める．補助方程式は $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$ で, この解は $t = 2$（重解）なので, 一般解は

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

である．【5 点】

次に, $(*)$ の特殊解を求める．特殊解は, $y = a\sin x + b\cos x$ と書けるので, これと

$$y' = a\cos x - b\sin x, \quad y'' = -a\sin x - b\cos x$$

を $(*)$ に代入すると,

$$\begin{aligned}
&(-a\sin x - b\cos x) - 4(a\cos x - b\sin x) \\
&\qquad\qquad + 4(a\sin x + b\cos x) = \sin x \\
\Longleftrightarrow\, &(3a + 4b)\sin x + (4a + 3b)\cos x = \sin x \\
&\therefore \begin{cases} 3a + 4b = 1 \\ -4a + 3b = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

を得る．この連立方程式を解くと, $a = \dfrac{3}{25}, b = \dfrac{4}{25}$ となる．よって, $(*)$ の特殊解（のひとつ）は

$$y = \frac{3}{25}\sin x + \frac{4}{25}\cos x$$

である．【5 点】
なお, 逆演算子の計算により, 以下のようにして特殊解を求めることもできる;

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{D^2 - 4D + 4}(\cos x + i\,\sin x) = \frac{1}{D^2 - 4D + 4}(e^{ix}) \\
=&\frac{1}{i^2 - 4i + 4}e^{ix} = \frac{1}{3 - 4i}(\cos x + i\,\sin x) \\
=&\frac{3 + 4i}{25}(\cos x + i\,\sin x) \\
=&\frac{1}{25}\left\{(3\cos x - 4\sin x) + i(3\sin x + 4\cos x)\right\}.
\end{aligned}$$

以上のことから, $(*)$ の一般解は

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + \frac{3}{25}\sin x + \frac{4}{25}\cos x$$

である．【5 点】

6 定数係数線形微分方程式

$$y'' + 2y' + 3y = x^2 - 3 \qquad (\sharp)$$

の一般解を求めなさい．なお, $(\sharp)$ の特殊解が

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (a, b, c \text{ は定数})$$

となることを利用してもよい．

まず, $(\sharp)$ の右辺を 0 とした同次方程式

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

の一般解を求める．補助方程式は $t^2 + 2t + 3 = 0$ で, この解は $t = -1 \pm \sqrt{2}\,i$（ただし, i は虚数単位）なので, 一般解は

$$y = e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x)$$

である．【5 点】

次に, $(\sharp)$ の特殊解を求める．特殊解は, $y = ax^2 + bx + c$ と書けるので, これと

$$y' = 2ax + b, \quad y'' = 2a$$

を $(\sharp)$ に代入すると,

$$\begin{aligned}
&2a + 2(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) = x^2 - 3 \\
\Longleftrightarrow\, &3ax^2 + (4a + 3b)x + (2a + 2b + 3c) = x^2 - 3 \\
&\therefore \begin{cases} 3a = 1 \\ 4a + 3b = 0 \\ 2a + 2b + 3c = -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

を得る．この連立方程式を解くと, $a = \dfrac{1}{3}, b = -\dfrac{4}{9}, c = -\dfrac{25}{27}$ となる．よって, $(\sharp)$ の特殊解（のひとつ）は

$$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{25}{27}$$

である．なお, 逆演算子の計算（演算子の展開）によって, 特殊解を求めることもできるが詳細は省略する．【5 点】

以上のことから, $(\sharp)$ の一般解は

$$y = e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x) + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{25}{27}$$

となることがわかる．【5 点】

5 点問題の部分点について 定数係数同次微分方程式の一般解を求める設問については, (i) 補助方程式をつくって解を求めることと, (ii) その解の特性によって一般解の形（3 パターン）が決まることを理解していると認められれば, 4 点加点する．

その他の問題についても, 部分点として 2 点加点することがある．