科　目　名　数学 I-J　　　出　題　者　名　佐藤 弘康

1　ベクトル $\boldsymbol{a}=(x,2,-1), \boldsymbol{b}=(-2,-4,y)$ に対し，次の問に答えなさい．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するような x, y の組を 1 つ挙げなさい．

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するのは，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$，すなわち，

$$-2x-8-y=0 \quad 【4 点】$$

が成り立つときである．これを満たす x, y の組は無数にある．例えば，$x=-3, y=-2$ など．　【4 点】

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が 1 次従属となるような x, y を求めなさい．

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が 1 次従属となるのは，$c_1\boldsymbol{a}+c_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ を満たす $(c_1,c_2)\neq(0,0)$ が存在することである．これは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行，つまり $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ となるときである．

$$(x,2,-1)=k(-2,-4,y)=(-2k,-4k,ky) \quad 【4 点】$$

の各成分を比較すると，

$$x=-2k, \quad 2=-4k, \quad -1=ky$$

である．第 2 式より，$k=-\frac{1}{2}$．よって，第 1 式より $x=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{1}$，第 3 式より $y=-\frac{1}{k}=\mathbf{2}$ であることがわかる．　【4 点】

2　$\boldsymbol{a}=(2,0,1,-1)$ と $\boldsymbol{b}=(\frac{1}{2},1,0,-1)$ に対し，

(1) 大きさ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$

(2) 内積 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$

の値を求めなさい．

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+0^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6} \quad 【3 点】$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2} \quad 【3 点】$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=2\times\frac{1}{2}+0\times1+1\times0+(-1)\times(-1)=2 \quad 【3 点】$$

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{9} \quad 【3 点】$$

3　$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ から，グラムシュミットの方法によって，正規直交系を作りなさい．

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{a}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}. \quad 【5 点】$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_2'&=\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1\\&=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad 【3 点】,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{u}_2'|}\boldsymbol{u}_2'=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}. \quad 【2 点】$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_3'&=\boldsymbol{a}_3-(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1-(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2\\&=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}, \quad 【3 点】\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{u}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}. \quad 【2 点】$$

4　部分空間とその基底に関する以下の文を読んで，空欄に当てはまる最も適切な言葉，数または式を回答欄に書きなさい．

$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ が生成する部分空間を W とおく．つまり，W は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の 1 次 $\boxed{(1)}$ の集合である．W の生成元は 3 つだが，次元は 3 ではない．なぜなら，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は 1 次 $\boxed{(2)}$ ではないからである．実際，$\boldsymbol{a}_1=\boxed{(3)}\,\boldsymbol{a}_2+\boxed{(4)}\,\boldsymbol{a}_3$ となるので，$W=\langle\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\rangle$ と書ける．また，$\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は 1 次 $\boxed{(2)}$ なので，W の次元は 2 であることがわかる．

(解答欄)

(1)		(2)	
(3)		(4)	

(1) **結合**　(2) **独立**　(3) $\mathbf{-2}$　(4) **3**　【各 3 点】

5 集合 $W = \{(a+b, a-b, b) \in R^3 \mid a, b \in R\}$ が R^3 の部分空間であるか否か判定しなさい．

部分空間である．　【5 点】
W のベクトルは

$$\begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ -b \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．a, b は任意の実数なので，W はベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が生成する部分空間であることがわかる．　【5 点】

6 R^2 の線形変換 $f : R^2 \to R^2$ が

$$f(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = -4\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2,$$
$$f(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$$

を満たすとき，f の表現行列 A を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は R^2 の基本ベクトルとする．

$$f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_2) = -4\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2,$$
$$f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$$

より，2 式の各辺を加えると $2f(\boldsymbol{e}_1) = -2\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2$ を得る．よって，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる．これを上の第 2 式に代入すると

$$f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 - f(\boldsymbol{e}_1) = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．よって，表現行列は

$$A = (f(\boldsymbol{e}_1)\ f(\boldsymbol{e}_2)) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

である．　【10 点】

7 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ の固有値を求めなさい．また，各固有値に対する固有空間を求めなさい．

固有多項式は

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 2 \\ -4 & -6-t \end{vmatrix} = t^2 + 3t - 10 = (t+5)(t-2).$$

よって，固有値は -5 と 2 である．　【2 点】
固有値 -5 に対する固有ベクトルは $k\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ 【2 点】，
固有値 2 に対する固有ベクトルは $l\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 【2 点】
である（k, l は 0 でない実数）．したがって，固有空間はそれぞれ，

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である（各【2 点】）．

8 2 次形式 $x^2 + 4xy - 2y^2$ の標準形を求めなさい．

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ とおくと，この 2 次形式は

$$x^2 + 4xy - 2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad 【2 点】$$

と書ける．この行列 A を直交行列で対角化する．

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & -2-t \end{vmatrix} = t^2 + t - 6 = (t-2)(t+3)$$

より，固有値は $-3, 2$ である．【2 点】
また，固有ベクトルはそれぞれ $k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である（k, l は 0 でない実数）．【各 2 点】
したがって，各固有ベクトルを正規化したベクトルを並べて行列 $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ をつくると，P は直交行列で，
${}^tPAP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．
ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P\boldsymbol{X}$ とおくと【2 点】，

$$\begin{aligned} x^2 + 4xy - 2y^2 &= {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{X})AP\boldsymbol{X} = {}^t\boldsymbol{X}({}^tPAP)\boldsymbol{X} \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= -3X^2 + 2Y^2 \end{aligned}$$

となる．【5 点】