科 目 名 線形代数学 II　　出 題 者 名 佐藤 弘康

1 次の行列式を求めなさい.【各 1 点】

(1) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & -5 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$ 【1 点】

(2) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 11 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -11 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -11 \times ((-12) - 7) = -11 \times (-19) = \mathbf{209}$$ 【1 点】

(3) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 12 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 10 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = -5 \times (-3 - 28)$$

$$= -5 \times (-31) = \mathbf{155}$$ 【1 点】

2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の余因子行列は $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ である. A の逆行列を求めなさい.

$|A| = -8$ なので, 【1 点】

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$ 【1 点】

※逆行列を掃き出し法で求めている場合は【1 点】.

3 $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ である. B の余因子行列を求めなさい.

$|B| = -2$ なので, 【1 点】

$$\widetilde{B} = |B|B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$ 【1 点】

学籍番号	1						学科	
氏名								

4 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が定める 1 次変換を f とする．また，座標 $(2,-3)$ の点を P とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 点 P の f による像の座標を求めなさい．

点 P の像は

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

である．【1 点】
これを計算すると，像の座標は $(11,1)$ であることがわかる．
【1 点】

(2) $f(\mathrm{Q})=\mathrm{P}$ となる点 Q の座標を求めなさい．

点 Q の座標を (a,b) とおく．つまり，

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．【1 点】

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$ 【1 点】

5 1 次変換 f によって，点 $(1,4)$ は点 $(-2,-1)$ に移り，点 $(5,8)$ は点 $(2,3)$ に移るとする．このとき，f の行列を求めなさい．

求めるものは

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たす行列 A である【1 点】．上の 2 つの式は

$$A\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

と同値である．$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ であるから，

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -24 & 12 \\ -20 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$ 【1 点】

6 直線 $\ell: y=x$ に関する対称移動は 1 次変換となり，その行列は次のように求めることができる; 点 $\mathrm{P}(a,b)$ の像を $\mathrm{Q}(a',b')$ とおくと，(i) P と Q を通る直線は ℓ と直交するので，

$$\frac{b-b'}{a-a'}=-1 \qquad (*1)$$

が成り立つ．また，(ii) P と Q の中点は ℓ 上の点なので，

$$\frac{b+b'}{2}=\frac{a+a'}{2} \qquad (*2)$$

が成り立つ．$(*1)(*2)$ 式を a',b' の連立方程式とみて解くと

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

を得る．よって，この変換の行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる．

これを参考にして，直線 $y=mx$ に関する対称移動の行列を求めなさい．

点 $\mathrm{P}(a,b)$ の像を $\mathrm{Q}(a',b')$ とおくと，(i) の条件は

$$\frac{b-b'}{a-a'}=-\frac{1}{m} \qquad (\dagger 1)$$

となり，(ii) の条件は

$$\frac{b+b'}{2}=m\cdot\frac{a+a'}{2} \qquad (\dagger 2)$$

となる．$(\dagger 1)(\dagger 2)$ 式を a',b' の連立方程式とみて解くと

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2}a+\frac{2m}{1+m^2}b \\ \frac{2m}{1+m^2}a+\frac{m^2-1}{1+m^2}b \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -(1-m^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

を得る．よって，この変換の行列は

$$\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -(1-m^2) \end{pmatrix}$$

である（この行列は対称な直交行列である）．【2 点】
ちなみに，$m=\tan\psi$ とおくと

$$\frac{1-m^2}{1+m^2}=\cos 2\psi,\quad \frac{2m}{1+m^2}=\sin 2\psi$$

となるので，上の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix}$$

と書ける．これは，直交行列（で回転行列ではない方）であることがわかる．

学籍番号	1						学科	
氏名								