科 目 名 線形代数学 II　　出 題 者 名　佐藤 弘康

1 次の行列式を求めなさい．各【4 点】

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \underline{-14}.$$

(2) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -6 \\ 3 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 3 & -6 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & -7 \end{vmatrix} = 112 + 24 - (-21) = \underline{157}.$$

2 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めなさい．ただし，A の余因子行列が $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ であることを用いてもよい．

$|A| = -2$ なので，　【4 点】

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad【4 点】$$

3 平面上の点 P の座標を $(-3, 2)$ とする．以下の問に答えなさい．

(1) 次の各空欄に当てはまる適切な数，式，または言葉を書きなさい．各【4 点】

点 P を x 軸に関して対称移動した点の座標は $\boxed{(-3,-2)}$ で，点 P を $\boxed{y\text{ 軸}}$ に関して対称移動した点の座標は $(3, 2)$ である．また，座標が $\boxed{(3,-2)}$ の点を原点に関して対称移動した点は P である．

(2) 点 P を，原点を中心に時計の針と反対周りに 45° 回転させた点の座標を求めなさい．

45° 回転変換の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad【4 点】$$

である．よって

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}}. \quad【4 点】$$

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が表す 1 次変換を f とする．f による点 Q の像が点 P のとき，点 Q の座標を求めなさい．

点 Q の座標を (X, Y) とおくと，仮定から

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad【4 点】$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2-2\times(-3)}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

よって，Q の座標は $\underline{\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{4}\right)}$．　【4 点】

4 $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 7 & -1\end{pmatrix}$ について次の問に答えなさい.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda & 1\\ 7 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$ 【4 点】

$$=\lambda^2-4\lambda-12=(\lambda+2)(\lambda-6)$$

よって, A の固有値は -2 と 6である. 【4 点】

$\lambda=-2$ のとき,

$$A-(-2)E=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 7 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}7 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって, 固有値 -2 に対する固有ベクトルは $k\begin{pmatrix}1\\ -7\end{pmatrix}$.

$\lambda=6$ のとき,

$$A-6E=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 7 & -7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって, 固有値 6 に対する固有ベクトルは $k\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

（ただし, k は 0 でない任意の実数）. 【各 4 点】

(2) 1 次変換 f によって直線 ℓ 上の点が ℓ 上の点に移るとき,「f により ℓ は不変である」という.
行列 A が定める 1 次変換 f により不変なすべての直線の方程式 を求めなさい.

不変な直線の方程式を $y=ax+b$ とおく. この直線上の点は $(t, at+b)$ と書けるので, この点を f で移すと

$$\begin{pmatrix}5 & 1\\ 7 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ at+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a+5)t+b\\ -(a-7)t-b\end{pmatrix}$$

となる. これが再び, 直線 $y=ax+b$ 上の点となるので, $-(a-7)t-b=a\{(a+5)t+b\}+b$ が任意の t に対して成り立つ. この式を整理すると

$$(a^2+6a-7)t+(ab+2b)=0$$

となり, a, b は $a^2+6a-7=0$ かつ $(a+2)b=0$ を満たす. よって, $a=-7, 1$, $b=0$ となるので, 不変な直線は $y=x$ と $y=-7x$ である. 一方, y 軸に平行な直線（$x=k$）で, f で不変なものはないことが示される（省略）. 【各 4 点】

(3) 1 次変換 f に対し, $f(\mathrm{P})=\mathrm{P}$ を満たす点を「f の不動点」という.
行列 A が定める 1 次変換 f の不動点をすべて求めなさい.

不変な点の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とすると, $A\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$ より, $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$ ならば, $\boldsymbol{p}$ は A の固有値 1 の固有ベクトルである. しかし, A は固有値 1 を持たないので, 不変な点は原点のみである. 【4 点】

5 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ について次の問に答えなさい.

(1) A の固有値を求めなさい.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$ 【4 点】

$$=\lambda^2+\lambda-6$$

$$=(\lambda-2)(\lambda+3)$$

よって, A の固有値は -3 と 2. 【4 点】

(2) ${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めなさい.

$\lambda=-3$ のとき,

$$A-(-3)E=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$\lambda=2$ のとき,

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

であるから, 各固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルとしてそれぞれ $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ を選び【各 4 点】,
$P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ とおけば, ${}^tPAP=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ と対角化できる. 【4 点】

(3) (1)(2) の結果を利用すると, 2 次形式

$$F=x^2+4xy-2y^2$$

は $F=\alpha X^2+\beta Y^2$ の形にできる. このときの定数 α, β, および x, y と X, Y の関係式を答えなさい.

(2) の結果から,

$$F=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}{}^tP\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$ 【4 点】

よって,

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}={}^tP\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

とおけば, $F=-3X^2+2Y^2$ と標準化される. 【4 点】

$\boxed{6}$ 次の 3 つの条件

(i) 行列式 $|A|$ の値は -2 である．

(ii) ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，A の固有ベクトルである．

(iii) 直線 $y = 2x$ 上の点は f の不動点である．

をすべて満たす 2 次正方行列 A を求めなさい．ただし，f は行列 A が定める 1 次変換とする．

条件 (iii) より，ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は A の固有値 1 の固有ベクトルであることがわかる．つまり，

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．また，(ii) より，

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす λ が存在する．以上のことから，

$$A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3\lambda \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1-6\lambda & -3+3\lambda \\ 2-2\lambda & -6+\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書ける．条件 (i) より，

$$\begin{aligned} -2 = |A| &= \frac{1}{25}\{(1-6\lambda)(-6+\lambda) - (-3+3\lambda)(2-2\lambda)\} \\ &= \frac{1}{25}\left\{-6\lambda^2 + 37\lambda - 6 + 6(\lambda-1)^2\right\} \\ &= \frac{1}{25}\left\{-6\lambda^2 + 37\lambda - 6 + 6(\lambda^2 - 2\lambda + 1)\right\} \\ &= \frac{25}{25}\lambda = \lambda. \end{aligned}$$

$$\therefore\ \lambda = -2.$$

よって，$A = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$．

【15 点（部分点なし）】

- $\boxed{1}$～$\boxed{5}$ の点数は 85 点を上限とする．
- $\boxed{6}$ については，基本的には部分点はないが，$\boxed{1}$～$\boxed{6}$ の点数との合計が 85 点を超えない範囲で部分点を加点することがある．