科 目 名 微分方程式　　出 題 者 名 佐藤 弘康

次の微分方程式について各問に答えなさい．

(a) $4xy\,dx - dy = 0$

(b) $(2x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$

(c) $(xy^2 - y)\,dx + dy = 0$

(d) $(3x^2 - 2y)\,dx - (3y^2 - 2x)\,dy = 0$

1 (a)〜(d) の中から，変数分離形微分方程式を 1 つ選び，

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

の形に変形しなさい．

変数分離形は (a) のみである．【1 点】

$$\frac{dy}{y} = 4x\,dx \quad 【1 点】$$

2 (a)〜(d) の中から，同次形微分方程式を 1 つ選び，

(1)
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$
の形にしなさい（関数 $f(t)$ を求めなさい）．

同次形は (b) のみである．【1 点】
この方程式は

$$xy\,y' = 2x^2 + y^2$$

と書ける．両辺を xy で割れと，$y' = 2\cdot\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ となるので，
$f(t) = \frac{2}{t} + t$ とおけば，$y' = f(y/x)$ と書ける．【1 点】

(2) $u = \frac{y}{x}$ と変数変換し，変数分離形微分方程式に変換しなさい．

$u = \frac{y}{x}$ とおくと，$y' = (xu)' = u + x\,z'$ となる．これらを (b) に代入すると

$$u + x\,u' = \frac{2}{u} + u \iff xu' = \frac{2}{u}$$
$$\iff uu' = \frac{2}{x}$$

となる．【1 点】

3 (a)〜(d) の中から，線形微分方程式を 1 つ選び，

$$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

の形にしなさい（関数 $P(x), Q(x)$ を求めなさい）．

線形微分方程式は (a) のみである．【1 点】
この方程式は

$$y' - 4xy = 0$$

と書けるので

$$P(x) = -4, \quad Q(x) = 0$$

の場合の線形微分方程式である．【1 点】

4 (a)〜(d) の中から，ベルヌーイの微分方程式を 1 つ選び，

(1)
$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$$
の形にしなさい（関数 $P(x), Q(x)$ および数 n を求めなさい）．

ベルヌーイの微分方程式は (c) のみである．【1 点】
この方程式は

$$y' - y = -xy^2$$

と書けるので

$$P(x) = -1, \quad Q(x) = -x, \quad n = 2$$

の場合のベルヌーイの微分方程式である．【1 点】

(2) $u = y^{1-n}$ と変数変換し，線形微分方程式に変換しなさい．

この方程式は $n = 2$ の場合のベルヌーイの微分方程式なので,$u = y^{-1} = \frac{1}{y}$ とおくと，$u' = -\frac{1}{y^2}y'$ である．
$y' = -y^2\,u'$ を代入すると，

$$-y^2\,u' - y = -xy^2 \iff u' + \frac{1}{y} = x$$
$$\iff u' + u = x$$

となり，これは線形微分方程式である．【1 点】

学籍番号	1							学科	
氏名									

次の微分方程式について各問に答えなさい．

(a) $\boldsymbol{4xy\,dx - dy = 0}$

(b) $\boldsymbol{(2x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0}$

(c) $\boldsymbol{(xy^2 - y)\,dx + dy = 0}$

(d) $\boldsymbol{(3x^2 - 2y)\,dx - (3y^2 - 2x)\,dy = 0}$

5 (a)〜(d) の中から，完全微分方程式を 1 つ選び，完全微分方程式であることを示しなさい．

完全微分方程式は存在しない．【1 点】
(d) において dy の項の符号を変えた方程式

$$(3x^2 - 2y)\,dx + (3y^2 - 2x)\,dy = 0$$

は，$P = 3x^2 - 2y,\ Q = 3y^2 - 2x$ とおくと，$P\,dx + Q\,dy = 0$ となり，$P_y = -2 = Q_x$ が成り立つので，完全である．

6 (a)〜(d) の中から 1 つ選び，その一般解を求めなさい．

$\boxed{6}$ は【1 点】
$\boxed{7}$ は，一般解が【1 点】，特殊解が【1 点】

解は右を参照．

7 (a)〜(d) の中から 1 つ選び，初期条件 $(x, y) = (1, 2)$ を満たす特殊解を求めなさい．ただし，$\boxed{6}$ で選択した微分方程式とは異なる方程式を選ぶこと．

(a) 変数分離した方程式の両辺を積分すると，

$$\int \frac{dy}{y} = \int 4x\,dx, \qquad \therefore \log y = 2x^2 + C$$

よって，一般解は $\boldsymbol{y = c\,e^{2x^2}}$ となる．初期条件を満たす特殊解は $\boldsymbol{y = 2\,e^{2x^2-2}}$.

(b) 変数変換した変数分離形方程式の一般解は

$$u^2 = \log x^4 + c$$

であるから，(b) の一般解は

$$\boldsymbol{y^2 = x^2(\log x^4 + c)}.$$

初期条件を満たす特殊解は $\boldsymbol{y^2 = x^2(\log x^4 + 4)}$.

(c) 変数変換した線形微分方程式は，$P(x) = 1,\ Q(x) = x$ の場合であるから，

$$\int P(x)\,dx = \int dx = x,$$
$$\int e^{\int P\,dx} Q(x)\,dx = \int e^x x\,dx = \int (e^x)' x\,dx$$
$$= x\,e^x - \int e^x (x)'\,dx$$
$$= x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x.$$

よって，$u = e^{-x}(x\,e^x - e^x + c)$ である．$u = \dfrac{1}{y}$ より，(c) の一般解は

$$\boldsymbol{e^x = y\,(x\,e^x - e^x + c)}.$$

初期条件を満たす特殊解は，$\boldsymbol{e^x = y\left(x\,e^x - e^x + \frac{e}{2}\right)}$.

(d) この方程式は，これまで学んだ方法では一般解を求めることができない．仮に，dy の符号を変えた完全微分方程式

$$(3x^2 - 2y)\,dx + (3y^2 - 2x)\,dy = 0$$

の一般解を求めるならば，公式より，

$$\int_0^x P(t, y)\,dt + \int_0^y Q(0, t)\,dt = c$$
$$\iff \int_0^x (3t^2 - 2y)\,dt + \int_0^y (3t^2 - 2 \times 0)\,dt = c$$
$$\iff \left[t^3 - 2yt\right]_0^x + \left[t^3\right]_0^y = c$$
$$\iff \boldsymbol{x^3 - 2xy + y^3 = c}.$$

また，初期条件を満たす特殊解は，$\boldsymbol{x^3 - 2xy + y^3 = 5}$.

学籍番号	1							学科		
氏名										