1 微分方程式

$$(x^2+3xy)\,dx+(3x^2-xy)\,dy=0$$

について，次に問に答えなさい．【各 6 点】

(1) 完全微分方程式でないことを示しなさい．

$P(x,y)=x^2+3xy$, $Q(x,y)=3x^2-xy$ とおくと，

$$P_y=3x\neq 6x-y=Q_x$$

より，微分方程式 $P\,dx+Q\,dy=0$ は完全微分方程式でないことがわかる．

(2) $\lambda=\dfrac{1}{x}$ が積分因子であることを示しなさい．

微分方程式の両辺に $\dfrac{1}{x}$ をかけると

$$(x+3y)\,dx+(3x-y)\,dy=0$$

となる．$\bar{P}(x,y)=\dfrac{P}{x}=x+3y$, $\bar{Q}(x,y)=\dfrac{Q}{x}=3x-y$ とおくと，$\bar{P}_y=3=\bar{Q}_x$ となり，$\bar{P}\,dx+\bar{Q}\,dy=0$ は完全微分方程式になる．よって，$\dfrac{1}{x}$ は積分因子である．

(3) 一般解を求めなさい．

$\bar{P}\,dx+\bar{Q}\,dy=0$ の一般解を求める．

$$\begin{aligned}c&=\int_0^x\bar{P}(t,y)\,dt+\int_0^y\bar{Q}(0,t)\,dt\\&=\int_0^x(t+3y)\,dt+\int_0^y(3\cdot0-t)\,dt\quad【6\text{ 点}】\\&=\left[\frac{1}{2}t^2+3yt\right]_0^x-\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^y\\&=\frac{1}{2}x^2+3xy-\frac{1}{2}y^2.\end{aligned}$$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x^2+6xy-y^2=C}$$

である．

(4) 初期条件 $x=2$, $y=1$ に対する特殊解を求めなさい．

$$C=2^2+6\cdot2\cdot1-1^2=4+12-1=15.$$

よって，求める特殊解は

$$\boldsymbol{x^2+6xy-y^2=15}$$

である．

2 微分方程式

$$y\,dx-x\,dy=0 \qquad (2)$$

について次の問に答えなさい．【各 6 点】

(1) 完全微分方程式でないことを示しなさい．

$P(x,y)=y$, $Q(x,y)=-x$ とおくと

$$P_y=1\neq-1=Q_x$$

より，微分方程式 $P\,dx+Q\,dy=0$ は完全微分方程式でないことがわかる．

(2) 積分因子を求めなさい．

$P_y-Q_x=2$ より，$\varphi(x)=\dfrac{2}{Q}=-\dfrac{2}{x}$, $\psi(y)=\dfrac{2}{P}=\dfrac{2}{y}$ とおくと，

$$\int\varphi(x)\,dx=-2\log x,\qquad\int\psi(y)\,dy=2\log y$$

より，積分因子は

$$\lambda=e^{-2\log x}=\boldsymbol{\frac{1}{x^2}}\quad\text{または}\quad\lambda=e^{-2\log y}=\boldsymbol{\frac{1}{y^2}}$$

である．

(3) 完全微分方程式の解法に従って，一般解を求めなさい．

(2) の結果より，積分因子を乗じた

$$\frac{y}{x^2}\,dx-\frac{1}{x}\,dy=0\quad\text{または}\quad\frac{1}{y}\,dx-\frac{x}{y^2}\,dy=0$$

は完全微分方程式になる．前者の方を解くと

$$c=\int_1^x\frac{y}{t^2}dt-\int_0^y\frac{1}{1}dy=\left[-\frac{y}{t}\right]_1^x-[t]_0^y=-\frac{y}{x}.$$

よって，一般解は $\boldsymbol{y=Cx}$ となる．

(4) 変数分離形微分方程式の解法に従って，一般解を求めなさい．

$\dfrac{1}{y}dy=\dfrac{1}{x}dx$ と書けるので，変数分離形である．

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\log y=\log x+c=\log Cx$$

$$\therefore\quad\boldsymbol{y=Cx}$$

3 定数係数線形微分方程式

$$y'' - 4y' + 4y = 25\sin x$$

について次の問に答えなさい.

(1) $y = 3\sin x + 4\cos x$ が, この微分方程式の特殊解であることを示しなさい.

$$\begin{aligned} y' &= 3\cos x - 4\sin x, \\ y'' &= -3\sin x - 4\cos x. \end{aligned}$$

よって, $3\sin x + 4\cos x$ が $y'' - 4y' + 4y = 25\sin x$ の特殊解ならば,

$$\begin{aligned} &-3\sin x - 4\cos x - 4(3\cos x - 4\sin x) \\ &\qquad + 4(3\sin x + 4\cos x) = 25\sin x \end{aligned}$$

が成り立つ. 実際に, 上の式の左辺は

$$(-3 + 16 + 12)\sin x + (-4 - 12 + 16)\cos x = 25\sin x$$

となる.【6 点】

(2) 一般解を求めなさい.

$y'' - 4y' + 4y = 0$ の補助方程式は

$$0 = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$$

となり, この解は $t = 2$ で重解なので, 一般解は

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

となる.【6 点】

よって, 問題の非同次微分方程式の一般解は

$$\boldsymbol{y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + 3\sin x + 4\cos x}$$

である.【6 点】

4 定数係数線形微分方程式

$$y'' - 2y' + 2y = 2x^2 - 2$$

について以下の問に答えなさい.

(1) この方程式の特殊解の 1 つは, $y = ax^2 + bx + c$ と書けることがわかっている. 定数 a, b, c を求めなさい.

$$\begin{aligned} y' &= 2ax + b, \\ y'' &= 2a. \end{aligned}$$

よって, $ax^2 + bx + c$ が $y'' - 2y' + 2y = 2x^2 - 2$ の特殊解ならば,

$$2a - 2(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 2$$

が成り立つ.【6 点】

両辺の係数を比較すると,

$$\begin{cases} 2a = 2 & (x^2 \text{ の係数}) \\ -4a + 2b = 0 & (x \text{ の係数}) \\ 2a - 2b + 2c = -2 & (\text{定数項}) \end{cases}$$

であるから, この連立方程式を解くことにより

$$\boldsymbol{a = 1, \quad b = 2, \quad c = 0}$$

を得る.【6 点】

(2) 一般解を求めなさい.

$y'' - 2y' + 2y = 0$ の補助方程式は

$$t^2 - 2t + 2 = 0$$

となり, この解は $t = 1 \pm \sqrt{-1}$ なので, 一般解は

$$y = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x$$

となる.【6 点】

よって, (1) の結果より, 問題の非同次微分方程式の一般解は

$$\boldsymbol{y = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x + x^2 + 2x}$$

である.【6 点】

$\boxed{5}$ 定数係数線形微分方程式

$$y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$$

の一般解を求めなさい．

まず，線形同次微分方程式

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

の一般解を求める．補助方程式は

$$0 = t^2 - 2t - 3 = (t+1)(t-3)$$

より，解は $t = -1, 3$ なので，一般解は

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

となる．【6 点】

次に，逆演算子の方法を用いて，$y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$ の特殊解を求める．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2 - 2D - 3} e^{3x} &= \frac{1}{(D-3)(D+1)} e^{3x} \\
&= \frac{1}{D-3} \cdot \frac{1}{D+1} e^{3x} \\
&= \frac{1}{D-3} \cdot \frac{1}{3+1} e^{3x} \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{D-3} e^{3x} \qquad \text{【6 点】} \\
&= \frac{1}{4} e^{3x} \int e^{-3x} e^{3x}\, dx \\
&= \frac{1}{4} e^{3x} \int dx \\
&= \frac{1}{4} x\, e^{3x}. \qquad \text{【6 点】}
\end{aligned}$$

以上のことから，求める一般解は

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{4} x\, e^{3x}}$$

である．【6 点】

$\boxed{6}$ 2 階定数係数線形微分方程式

$$f(D)y = e^{2x} + e^{-x}$$

の一般解が

$$y = c_1 e^{x} \cos 3x + c_2 e^{x} \sin 3x + g(x)$$

であるとき，多項式 $f(t)$ と関数 $g(x)$ を求めなさい．ただし，c_1, c_2 は任意定数とする．

一般解の任意定数を含む項が

$$c_1 e^{x} \cos 3x + c_2 e^{x} \sin 3x$$

であるから，これは補助方程式の解が虚数解 $t = 1 \pm 3i$ であることを意味している．つまり，補助方程式は

$$0 = \{t - (1+3i)\}\{t - (1-3i)\} = t^2 - 2t + 10$$

より，

$$\boldsymbol{f(t) = t^2 - 2t + 10}$$

となることがわかる．

一方，$g(x)$ は $f(D)y = e^{2x} + e^{-x}$ の特殊解なので，逆演算子の方法で計算すると，

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{D^2 - 2D + 10} (e^{2x} + e^{-x}) \\
&= \frac{1}{D^2 - 2D + 10} e^{2x} + \frac{1}{D^2 - 2D + 10} e^{-x} \\
&= \frac{1}{2^2 - 2 \cdot 2 + 10} e^{2x} + \frac{1}{(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 10} e^{-x} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{10} e^{2x} + \frac{1}{13} e^{-x}}
\end{aligned}$$

となる．【15 点】

- $\boxed{1}$～$\boxed{5}$ の点数は 85 点を上限とする．
- $\boxed{1}$～$\boxed{5}$ の点数の合計が 84 点以下の場合，合計 85 点を上限として $\boxed{6}$ の部分点を加点する．