科 目 名　解析演習 解析基礎　　出 題 者 名　佐藤 弘康

1 次の各空欄に当てはまる適切な数, 式, 記号または言葉を書きなさい. なお, 各設問間の空白は計算のために使ってよい.
各【3 点】×20

(1) 2017° は, 弧度法で表すと $\boxed{\frac{2017}{180}\pi}$ ラジアンであり, 第 $\boxed{3}$ 象限の角である.

(2) 角 θ を $\tan\theta = -\frac{1}{3}$ を満たす第 2 象限の角とすると, $\cos\theta$ の符号は $\boxed{負}$ であるから, $\cos\theta = \boxed{}$ である

$$\cos^2\theta = \frac{1}{\tan^2\theta + 1} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1} = \frac{9}{10}.$$

仮定から, $\cos\theta$ は負なので, **cos** $= -\dfrac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{10}}}$.

(3) 余弦関数に関する加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta \boxed{-} \sin\alpha\ \sin\beta$$

に三角関数の相互関係式

$$\sin x = \cos\left(\boxed{\frac{\pi}{2}} - x\right),$$
$$\cos x = \sin\left(\boxed{\frac{\pi}{2}} - x\right)$$

を適用するにより正弦関数に関する加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \boxed{\cos\alpha} \times \sin\beta$$

が得られる. 差 $\alpha - \beta$ についての加法定理の式は

$$\sin(-x) = \boxed{-} \sin x,$$
$$\cos(-x) = \boxed{+} \cos x$$

を用いて導くことができる.

(4) 加法定理を用いると, $\cos\frac{7\pi}{12} = \boxed{}$ と計算できる.

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos 105^\circ = \cos(45^\circ + 60^\circ)$$
$$= \cos 45^\circ\ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ\ \sin 60^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}} - \sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{4}}$$

(5) 2 倍角の公式とは, 加法定理の式に $\beta = \alpha$ を代入して得られる

$$\sin 2\alpha = \boxed{2\sin\alpha\ \cos\alpha},$$
$$\cos 2\alpha = 1 - \boxed{2\sin^2\alpha} = \boxed{2\cos^2\alpha} - 1$$

のことである. 2 つ目の式の α を $\frac{\alpha}{2}$ に置き換えると

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \boxed{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)},$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \boxed{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$$

を得る. これが半角の公式である.

(6) θ を $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ かつ $\sin\theta = \frac{1}{3}$ を満たす数とする. このとき, $\cos\theta$ の符号は $\boxed{負}$ であるから, $\cos\theta = \boxed{}$ である.

2 倍角の公式から, $\sin 2\theta = \boxed{}$ が得られる. また, <u>(∗) $\cos\frac{\theta}{2}$ **の符号は正である**</u> から, 半角の公式より, $\cos\frac{\theta}{2} = \boxed{}$ が得られる.

θ は第 2 象限の角なので, $\cos\theta$ は負である. よって,

$$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{3}}.$$

2 倍角の公式より,

$$\sin 2\theta = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{9}}.$$

半角の公式より,

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{3-2\sqrt{2}}{6}.$$

$\cos\frac{\theta}{2} > 0$ より, $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{3}-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{6}}} = \dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}}$.

2 $\boxed{1}$(6) の下線 (∗) の理由を説明しなさい.

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ より, $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ なので, $\frac{\theta}{2}$ は第 1 象限の角である. よって, $\cos\frac{\theta}{2}$ は正である.【5 点】

3 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

と余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

を活用して，次の問に答えなさい．

(1) 2 辺の長さが 3 と 5 で，その 2 辺の挟角が $60°$ の三角形がある．残る 1 辺の長さを求めなさい．

余弦定理より，残る 1 辺の長さ x は

$$\begin{aligned} x^2 =& 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 60° \\ =& 9 + 25 - 30\cdot\frac{1}{2} \\ =& 19. \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{x = \sqrt{19}}$．　【5 点】

(2) 3 辺の長さが $5, 6, 7$ の三角形の外接円の半径を求めなさい．

余弦定理より，長さ 7 の辺の対角の大きさを θ とすると

$$\begin{aligned} 49 = 7^2 =& 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cdot\cos\theta \\ =& 25 + 36 - 60\cdot\cos\theta \end{aligned}$$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}. \quad 【5 点】$$

(長さ 5, 6 の辺の対角の余弦の値はそれぞれ $\frac{5}{7}, \frac{19}{35}$ である)
θ は三角形の内角で，$\cos\theta > 0$ より，θ は鋭角である．よって，

$$0 < \sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

(長さ 5, 6 の辺の対角の正弦の値はそれぞれ $\frac{2\sqrt{6}}{7}, \frac{12\sqrt{6}}{35}$ である)
正弦定理より，外接円の半径は

$$R = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{\sin\theta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \boldsymbol{\frac{35}{4\sqrt{6}}}. \quad 【5 点】$$

4 $y = 3\cos(2x - 1)$ の周期を答えさい．

$y = \cos 2x$ と周期は同じである．よって，$\boldsymbol{\pi}$．【5 点】

5 次の式を簡単にしなさい．

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\theta - \pi)$$

0．【5 点】　なぜなら，三角関数の相互関係より，

$$\begin{aligned} &= \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos((\theta + \pi) - 2\pi) \\ &= \cos\theta + \cos(\theta + \pi) = \cos\theta - \cos\theta = 0. \end{aligned}$$

また，加法定理を用いて示すこともできる．

$$\begin{aligned} &= \sin\theta\ \cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\ \sin\frac{\pi}{2} + \cos\theta\ \cos\pi + \sin\theta\ \sin\pi \\ &= \sin\theta\cdot 0 + \cos\theta\cdot 1 + \cos\theta\cdot(-1) + \sin\theta\cdot 0 \\ &= \cos\theta - \cos\theta = 0. \end{aligned}$$

6 関数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ について次の各問に答えなさい．

(1) 三角関数の合成によって，$f(x) = r\ \sin(x + \alpha)$ の形にしたときの r と α の値を求めなさい．

$$f(x) = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2}\ \sin(x + \alpha) = 2\sin(x + \alpha).$$

よって，$\boldsymbol{r = 2}$．【5 点】
また，α は

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

を満たす数なので，$\boldsymbol{\alpha = -\frac{\pi}{3}}$ である．【5 点】

(2) $f(x)$ の最小値と最大値を求めなさい．

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，最大値は $r = \boldsymbol{2}$，最小値は $\boldsymbol{-2}$．
【5 点】

(3) $f(x) = 0$ を満たす x を 1 つ答えなさい．

求めるものは，$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ を満たす x である．$\sin 0 = 0$ より，例えば $x = \frac{\pi}{3}$．　【5 点】

(4) $y = f(x)$ のグラフを描きなさい．

(1)〜(3) の結果から，グラフは周期が 2π，振幅が $-2 \leqq y \leqq 2$ の正弦波で，x 軸とは $x = \frac{\pi}{3}$ で交わるグラフである（概形は省略）．　【5 点】

$\boxed{\mathbf{7}}$ 不等式

$$\sin x \leqq \cos 2x$$

を満たす x の範囲を求めなさい．ただし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．

$$\begin{aligned} \sin x \leqq \cos 2x &\iff \sin x - (1 - 2\sin^2 x) \leqq 0 \\ &\iff 2\sin^2 x + \sin x - 1 \leqq 0 \\ &\iff (2\sin x - 1)(\sin x + 1) \leqq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore\ -1 \leqq \sin x \leqq \frac{1}{2}.$$

よって，

$$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6} \leqq x \leqq 2\pi}$$

である.【15 点】

- $\boxed{1}$〜$\boxed{6}$ の点数は 85 点を上限とする.
- $\boxed{7}$ については，基本的には部分点はないが，$\boxed{1}$〜$\boxed{6}$ の点数との合計が 85 点を超えない範囲で部分点を加点することがある.