1 以下の文を読んで, (1)〜(5) に当てはまるもっとも適当なものを下の選択肢から選び, 丸で囲みなさい.

平面内の領域 D の点 (x, y) に対し, 実数 $z = f(x, y)$ が対応するとき, f を D 上の 2 変数関数といい, D を f の $\boxed{(1)}$ という. 点 (x, y) が D の範囲を動くとき, z が取り得る範囲を f の $\boxed{(2)}$ という. $\boxed{(1)}$ が明示的に与えられていない場合は, f が定義可能な点 (x, y) の全体の集合を $\boxed{(1)}$ と考えることとする.

2 変数関数

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

の $\boxed{(1)}$ は原点を中心とする半径 $\boxed{(3)}$ の円の $\boxed{(4)}$ であり, $\boxed{(2)}$ は $\boxed{(5)}$ である.

(選択肢)

(1) 関数 ・ 定義域 ・ 区間 ・ 終域

(2) 始域 ・ 値 ・ 値域 ・ 全量

(3) 1 ・ 2 ・ 3 ・ 4

(4) 内部 ・ 外部 ・ 円周

(5) 実数全体 ・ 正の実数全体 ・ $0 < z < 1$ の範囲

(1) 定義域 (2) 値域 (3) 2 (4) 内部 (5) **正答なし**
【各 2 点】

2 次の関数 $f(x, y)$ について, 2 次までの偏導関数をすべて求めなさい.

(1) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y$

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 4xy$$
$$f_y(x, y) = -2x^2 + 3$$
$$f_{xx}(x, y) = 6x - 4y$$
$$f_{xy}(x, y) = -4x$$
$$f_{yy}(x, y) = 0$$

【各 1 点】.

(2) $f(x, y) = \sin(xy)$

$$f_x(x, y) = y\cos(xy)$$
$$f_y(x, y) = x\cos(xy)$$
$$f_{xx}(x, y) = -y^2\sin(xy)$$
$$f_{xy}(x, y) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$
$$f_{yy}(x, y) = -x^2\sin(xy)$$

【各 1 点】.

3 以下は $2.01^4 \times 2.99^3$ の近似値を計算する方法について述べた文章である. 空欄に当てはまる最も適切な式または数を解答欄に書きなさい.

$f(x, y) = x^4y^3$ とおくと,

$$2.01^4 \times 2.99^3 = f(2 + \boxed{(1)}, 3 + \boxed{(2)})$$

である. ここで, $z = f(x, y)$ の全微分は

$$dz = \boxed{(3)}$$

であり, これは独立変数 x, y の増分が dx, dy のときの z の増分を表している. $x = 2$, $y = 3$, $dx = \boxed{(1)}$, $dy = \boxed{(2)}$ とすると,

$$dz = \boxed{(4)}$$

となるので, 次の近似式

$$2.01^4 \times 2.99^3 = \boxed{(5)} + \boxed{(4)}$$

が得られる.

(解答欄)

(1) ☐ (2) ☐

(3) ($z = x^4y^3$ の全微分)

☐

(4) ☐ (5) ☐

(1) 0.01 (2) -0.01 (3) $dz = 4x^3y^3\,dx + 3x^4y^2\,dy$
(4) 4.32 (5) $2^4 \times 3^3 (= 432)$
((3) は【2 点】, 他は【各 1 点】)

4 $x^2+2xy-y^2=-2$ の陰関数を $y=f(x)$ とする．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

$F(x,y)=x^2+2xy-y^2+2$ とおくと，

$$\begin{aligned} F_x &= 2x+2y=2(x+y), \\ F_y &= 2x-2y=2(x-y) \end{aligned}$$

である．$y=f(x)$ は $F(x,y)=0$ の陰関数なので，

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{2(x+y)}{2(x-y)}=-\boldsymbol{\frac{x+y}{x-y}}. \quad 【4 点】$$

(2) $f'(a)=0$ を満たす $x=a$ と，$b=f(a)$ の組 (a,b) をすべて求めなさい．

$f(a)=b$ とすると，

$$F(a,b)=a^2+2ab-b^2+2=0 \tag{1}$$

が成り立つ．$f'(a)=0$ ならば，(1) の結果より，

$$f'(a)=-\frac{a+b}{a-b}=0, \quad つまり, \quad a+b=0 \tag{2}$$

が成り立つ．(2) 式より，$b=-a$ を (1) 式に代入すると

$$a^2+2a\times(-a)-(-a)^2+2=0, \qquad \therefore\ a=\pm1$$

を得る．ゆえに求める組は，$(a,b)=\boldsymbol{(1,-1)}$，$\boldsymbol{(-1,1)}$ である【4 点】．

(3) $f'(a)=0$ を満たす $x=a$ に対し，$f''(a)$ の符号を調べ，$b=f(a)$ が極大値か極小値か，またはそのどちらでもないか判定しなさい．ただし，$F(x,y)=0$ の陰関数の 2 階導関数が

$$y''=-\frac{F_{xx}+2F_{xy}\,y'+F_{yy}(y')^2}{F_y}$$

となることを用いてよい．

$f(a)=b$ かつ $f'(a)=0$ ならば，

$$f''(a)=-\frac{F_{xx}(a,b)}{F_y(a,b)}$$

が成り立つ．

$$F_{xx}(x,y)=2$$

より，

$$f''(x)=-\frac{2}{2(x-y)}=-\frac{1}{x-y}. \qquad 【2 点】$$

$f''(1)=-\dfrac{1}{2}<0$，$f''(-1)=\dfrac{1}{2}>0$ なので，$\boldsymbol{b=-1}$ **は極大値**で，$\boldsymbol{b=1}$ **は極小値**である．【3 点】

5 関数

$$f(x,y)=x^3-3xy+y^3+3$$

の極値をすべて求めなさい．

f の偏導関数は

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2-3y=3(x^2-y), \\ f_y &= -3x+3y^2=3(y^2-x) \end{aligned}$$

である．連立方程式 $f_x=f_y=0$，すなわち

$$\begin{cases} x^2-y=0 \\ y^2-x=0 \end{cases}$$

の解は $(x,y)=(0,0)$ と $(1,1)$ である【4 点】．なぜなら，連立方程式の 1 つ目の式を $y=x^2$ と変形し，これを 2 つ目の式に代入すると

$$\begin{aligned} x^4-x=0 &\iff x(x^3-1)=0 \\ &\iff x(x-1)(x^2+1x+1)=0 \\ &\therefore\ x=0,1 \end{aligned}$$

これらの点で極値をとるか否か判定する．f の 2 次偏導関数は

$$\begin{aligned} (A=)\ f_{xx} &= 6x \\ (B=)\ f_{xy} &= -3 \\ (C=)\ f_{yy} &= 6y \end{aligned}$$

である．

(i) $(x,y)=(0,0)$ のとき，

$$AC-B^2=0\times0-(-3)^2=-9<0$$

であるから，この点で**極値はとらない**【4 点】．

(ii) $(x,y)=(1,1)$ のとき，

$$AC-B^2=6\times6-(-3)^2=27>0$$

なので，この点で極値をとる．$A=6>0$ より，この点で**極小値をとり**【3 点】，その値は

$$f(1,1)=1-3+1+3=\boldsymbol{2}$$

である．【2 点】