科 目 名　応用数学 I-J　　出 題 者 名　佐藤 弘康

1 次の累次積分を求めなさい. 各【4 点】

(1) $\int_0^2 \int_0^1 (3-x-y)\,dx\,dy$

$$=\int_0^2 \int_0^1 (3-x-y)\,dx\,dy$$
$$=\int_0^2 \left[(3-y)x-\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy$$
$$=\int_0^2 \left\{(3-y)-\frac{1}{2}\right\} dy$$
$$=\int_0^2 \left(\frac{5}{2}-y\right) dy$$
$$=\left[\frac{5}{2}y-\frac{y^2}{2}\right]_0^2$$
$$=5-2$$
$$=\mathbf{3}.$$

(2) $\int_0^1 \int_0^x x\,y^2\,dy\,dx$

$$=\int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x} dx$$
$$=\int_0^1 \frac{x^4}{3}dx$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$
$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}}.$$

(3) $\int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} e^{x-y}\,dy\,dx$

$$=\int_0^2 e^x \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-y}\,dy\,dx$$
$$=\int_0^2 e^x \left[-e^{-y}\right]_{y=0}^{y=\frac{x}{2}} dx$$
$$=\int_0^2 e^x \left(-e^{-\frac{x}{2}}+1\right) dx$$
$$=\int_0^2 \left(e^x-e^{\frac{x}{2}}\right) dx$$
$$=\left[e^x-2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^2$$
$$=e^2-2e-(1-2)$$
$$=\mathbf{e^2-2e+1=(e-1)^2}.$$

2 次の 2 重積分を累次積分の形に直しなさい. 各【4 点】

(1) $\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq y \leqq 2$

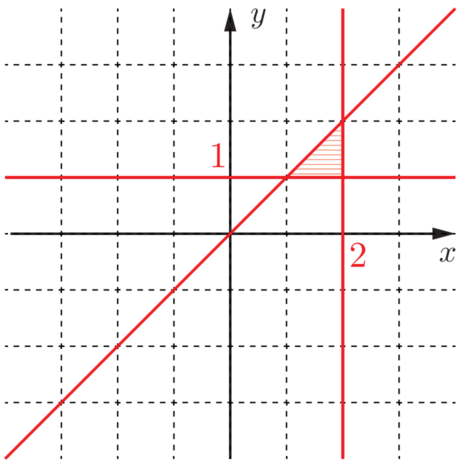
$$=\int_1^2 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 \int_1^2 f(x,y)\,dy\,dx.$$

(2) $\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad D: -y \leqq x \leqq 0,\ 0 \leqq y \leqq 1$

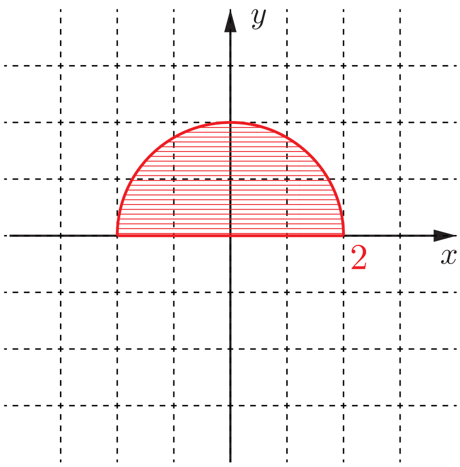
$$=\int_0^1 \int_{-y}^0 f(x,y)\,dx\,dy.$$

3 次の 2 つの不等式が表す領域 D を xy-平面に図示しなさい. 各【4 点】

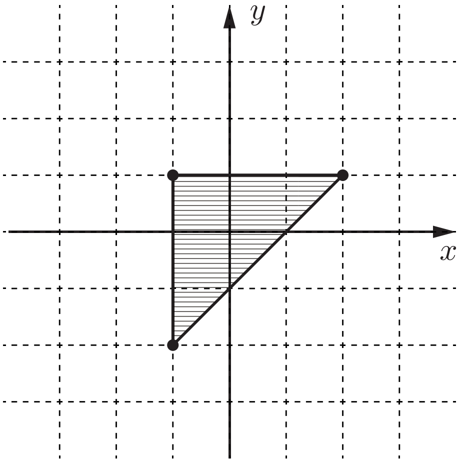
(1) $D: 1 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq x$



(2) $D: x^2+y^2 \leqq 4,\ y \geqq 0$



4 3 点 $(-1,1)$, $(-1,-2)$, $(2,1)$ を頂点とする三角形の領域（下図参照）を x, y の不等式で表しなさい．



$\begin{cases} -1 \leqq x \leqq 2 \\ x-1 \leqq y \leqq 1 \end{cases}$ または $\begin{cases} -1 \leqq x \leqq y+1 \\ -2 \leqq y \leqq 1 \end{cases}$ 【4 点】

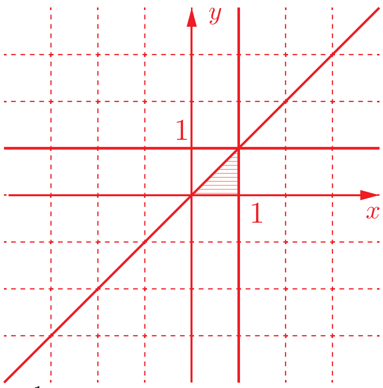
【部分点】 2 つの不等式のうち, 一方のみ正しい場合は 1 点.

5 次の累次積分の積分順序を変更しなさい． 各【4 点】

【部分点】積分領域の図が正しく描けていれば 1 点.

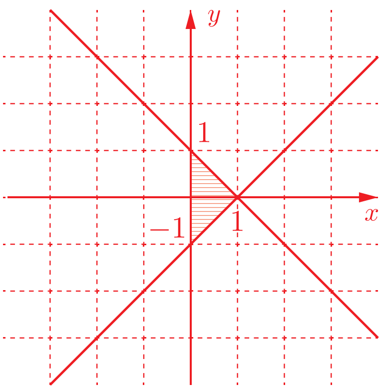
(1) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx$

$$= \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$



(2) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$

$$= \int_{-1}^0 \int_0^{y+1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_0^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy.$$



6 次の不等式で表される空間の領域の体積 V を求めなさい． 各【5 点】

【部分点】体積を累次積分として書けていれば 1 点.

(1) $V : 0 \leqq x \leqq 2, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq x^2+1$

$x^2+1 \geqq 0$ より,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_0^1 (x^2+1)\,dy\,dx \\ &= \int_0^2 \left[(x^2+1)y\right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 (x^2+1)(1-0)\,dx \\ &= \int_0^2 (x^2+1)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^2 dx \\ &= \frac{8}{3}+2 \\ &= \mathbf{\frac{14}{3}}. \end{aligned}$$

(2) $V : -y \leqq x \leqq 0, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq (x+y)e^x$

$-y \leq x$ を満たすので, $(x+y)e^x \geqq ((-y)+y)e^x = 0$. よって,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_{-y}^0 (x+y)e^x\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \int_{-y}^0 (x+y)\,(e^x)'\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \left\{\left[(x+y)e^x\right]_{x=-y}^{x=0} - \int_{-y}^0 (x+y)'e^x\,dx\right\} dy \\ &= \int_0^1 \left\{y - \int_{-y}^0 e^x\,dx\right\} dy \\ &= \int_0^1 \left\{y - \left[e^x\right]_{x=-y}^{x=0}\right\} dy \\ &= \int_0^1 \left(y-1+e^{-y}\right) dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2} - y - e^{-y}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - 1 - e^{-1} - (-1) \\ &= \mathbf{\frac{1}{2} - \frac{1}{e}}. \end{aligned}$$