**1** 次の文章中の空欄 (1) ～ (10) に入る適切な言葉を（ア）～（チ）の中から選びなさい．また, 空欄 (a)～(e) に入る適切な式を書きなさい．

- 1 回の試行で, ある事象 $A$ が起こる確率を $p$ とする．この試行を $n$ 回独立に試行したとき, $A$ が $k$ 回起こる回数 $X$ は確率変数となる．この確率分布を二項分布といい, $B(n,p)$ で表す．$B(n,p)$ の期待値は $\boxed{\text{(a)}}$ で, 分散は $\boxed{\text{(b)}}$ である．
- $X$ が二項分布 $B(n,p)$ に従うとき, $n$ が大きく, $p$ が十分小さい場合, $X$ は近似的に $\boxed{(1)}$ 分布に従う．
- $X_1, X_2, \ldots X_n$ を互いに独立で, 同じ確率分布に従う確率変数とする．このとき, $n$ が十分大きければ,
$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$
は近似的に $\boxed{(2)}$ 分布に従う．これを $\boxed{(3)}$ 定理という．各 $X_i$ の期待値が $\mu$ で分散が $\sigma^2$ のとき, $\bar{X}$ の期待値は $\boxed{\text{(c)}}$ で, 分散は $\boxed{\text{(d)}}$ である．
- 確率変数 $X$ の期待値を $\mu$, 標準偏差を $\sigma$ とするとき, 任意の $\lambda > 1$ に対し,
$$P(|X - \mu| < \lambda\sigma) > 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$
が成り立つ．これを $\boxed{(4)}$ の定理という．また, 余事象の確率を考えることにより, 上の不等式は
$$P(|X - \mu| \geqq \lambda\sigma) \leqq \boxed{\text{(e)}}$$
と同値であることがわかる．
- 調査対象である集団（集合）$\Pi$ と, $\Pi$ の各要素の特性 $X$ の組 $(\Pi, X)$ を $\boxed{(5)}$ という．この $X$ は確率変数として確率分布する．この確率分布を $\boxed{(6)}$ といい, $X$ の期待値を $\boxed{(7)}$ , 分散を $\boxed{(8)}$ という．
- $\Pi$ の全ての要素に対して, $X$ を調べることを $\boxed{(9)}$ という．しかし, $\Pi$ が非常に大きな集団であったり, 無限である場合は $\boxed{(9)}$ は不可能である． $\Pi$ から選ばれた $n$ 個の要素の $X$ の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ から $(\Pi, X)$ 全体の情報を得る（推定する）ことを, $\boxed{(10)}$ という．

（解答欄）

【各 2 点】

(a)～(e) に入る適切な式を書きなさい．

(a) $np$

(b) $np(1-p)$

(c) $\mu$

(d) $\dfrac{\sigma^2}{n}$ ※標準偏差 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ は【1 点】

(e) $\dfrac{1}{\lambda^2}$

(1)～(10) に入る最も適切な言葉を下の（ア）～（チ）から選びなさい．

| | |
|---|---|
| (1) （イ） | (2) （ア） |
| (3) （オ） | (4) （ウ） |
| (5) （ソ） | (6) （チ） |
| (7) （サ） | (8) （シ） |
| (9) （キ） | (10) （カ） |

（選択肢）

（ア）正規　（イ）ポアソン　（ウ）チェビシェフ

（エ）ラプラス　（オ）中心極限

（カ）標本調査　（キ）全数調査　（ク）国勢調査

（ケ）標本　（コ）標本抽出　（サ）母平均

（シ）母分散　（ス）不偏分散　（セ）標本分散

（ソ）母集団　（タ）数標識　（チ）母集団分布

**2** 次の確率の値を求めなさい．ただし，$Z$ は標準正規分布に従う確率変数とし，$X$ は期待値 $\mu = 160$，分散 $\sigma^2 = 25$ の正規分布に従う確率変数とする．

【各 5 点】

(1) $P(-0.97 \leqq Z \leqq 0)$

$$
\begin{aligned}
&= P(0 \leqq Z \leqq 0.97) \\
&= \Phi(0.97) \\
&= \mathbf{0.33398}.
\end{aligned}
$$

(2) $P(0.51 \leqq Z \leqq 2.22)$

$$
\begin{aligned}
&= P(0 \leqq Z \leqq 2.22) - P(0 \leqq Z < 0.51) \\
&= \Phi(2.22) - \Phi(0.51) \\
&= 0.48679 - 0.19497 \\
&= \mathbf{0.29182}.
\end{aligned}
$$

(3) $P(147.4 \leqq X \leqq 162.3)$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\frac{147.4-160}{5} \leqq \frac{X-160}{5} \leqq \frac{162.3-160}{5}\right) \\
&= P\left(-\frac{12.6}{5} \leqq Z \leqq \frac{2.3}{5}\right) = P\left(-2.52 \leqq Z \leqq 0.46\right) \\
&= P\left(-2.52 \leqq Z \leqq 0\right) + P\left(0 \leqq Z \leqq 0.46\right) \\
&= P\left(0 \leqq Z \leqq 2.52\right) + P\left(0 \leqq Z \leqq 0.46\right) \\
&= \Phi(2.52) + \Phi(0.46) \\
&= 0.49413 + 0.17724 = \mathbf{0.67137}.
\end{aligned}
$$

(4) $P(X \leqq 151.1)$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\frac{X-160}{5} \leqq \frac{151.1-160}{5}\right) \\
&= P\left(Z \leqq -\frac{8.9}{5}\right) = P\left(Z \leqq -1.78\right) \\
&= P\left(1.78 \leqq Z\right) \\
&= 0.5 - \Phi(1.78) \\
&= 0.5 - 0.46246 = \mathbf{0.03754}.
\end{aligned}
$$

- 確率の値を求めず，$\Phi(k)$ を用いて正しく表せていれば，各問【4 点】加点.

**3** 表と裏の出る確率が同じである硬貨を 4000 回投げるときに，表が出る回数を $X$ とする．このとき，次の問に答えなさい．

【各 5 点】

(1) $X$ は確率変数と考えられる．$X$ の期待値と分散の値を答えなさい．

$X$ は 二項分布 $B\left(4000, \frac{1}{2}\right)$ に従うので，期待値は，

$$\mu = 4000 \times \frac{1}{2} = \mathbf{2000},$$

分散は

$$\sigma^2 = 4000 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \mathbf{1000}$$

である．

- 片方だけ求めている場合は【2 点】
- ただし，(2) において，$X$ が $N(2000, 1000)$ に従うとして計算している場合は【5 点】．

(2) $X$ が近似的に正規分布に従うとして，表が 2018 回以上でる確率を求めなさい．

$$
\begin{aligned}
P(2018 \leqq X) \approx & P(2018 - 0.5 \leqq X) \\
&= P\left(\frac{2018-0.5-2000}{\sqrt{1000}} \leqq \frac{X-2000}{\sqrt{1000}}\right) \\
&= P\left(\frac{17.5}{\sqrt{1000}} \leqq Z\right) \quad \text{【2 点】} \\
&= 0.5 - P\left(0 \leqq Z < \frac{17.5}{\sqrt{1000}}\right) \\
&= 0.5 - \Phi\left(\frac{17.5}{\sqrt{1000}}\right) \\
&= 0.5 - \Phi\left(0.55\right) \\
&= 0.5 - 0.20884 \\
&= \mathbf{0.29116}. \quad \text{【5 点】}
\end{aligned}
$$

- 正規分布に近似して確率を求める際，$\pm 0.5$ 補正をしていない場合は 1 点減点する．

**4** ある地方の中学校新入生男子の平均身長 $\mu$ を調べたい．そのため，900 人を無作為抽出したら，平均は 146.6cm であった．過去の資料から，小学校新入生男子の身長は，標準偏差 $\sigma = 9.9$cm の正規分布に従うと考えられる．平均身長 $\mu$ の信頼度 95% と 99% の信頼区間をそれぞれ求めなさい．

900 人分の平均を $\bar{x}$ とおくと，これは $N(\mu, 9.9^2/900)$ に従う確率変数のひとつの現実値である．信頼度 $\beta$ の信頼区間を

$$[\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon], \qquad \bar{x} = 146.6$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\beta =& P(\bar{x}-\varepsilon \leqq \mu \leqq \bar{x}+\varepsilon)\\ =& P(-\varepsilon \leqq \bar{x}-\mu \leqq \varepsilon)\\ =& P\left(-\frac{\varepsilon}{9.9/\sqrt{900}} \leqq \frac{\bar{x}-\mu}{9.9/\sqrt{900}} \leqq \frac{\varepsilon}{9.9/\sqrt{900}}\right)\\ =& 2P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\varepsilon}{9.9/\sqrt{900}}\right)\\ =& 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{9.9/\sqrt{900}}\right). \quad (【4 点】)\end{aligned}$$

信頼度 $\beta = 0.95$ のとき，

$$\begin{aligned}&\Phi\left(\frac{\varepsilon}{9.9/\sqrt{900}}\right) = \frac{0.95}{2} = 0.475\\ \Longleftrightarrow\ & \frac{\varepsilon}{9.9/\sqrt{900}} = 1.96\\ \Longleftrightarrow\ & \varepsilon = 1.96 \times \frac{9.9}{\sqrt{900}} = \frac{1.96 \times 9.9}{30} = 0.6468.\end{aligned}$$

よって，信頼限度は $146.6 \pm 0.65$ であるから，信頼区間は

$$\mathbf{[145.95, 147.25]}$$

である．【5 点】

一方，信頼度 $\beta = 0.99$ のとき，

$$\begin{aligned}&\Phi\left(\frac{\varepsilon}{9.9/\sqrt{900}}\right) = \frac{0.99}{2} = 0.495\\ \Longleftrightarrow\ & \frac{\varepsilon}{9.9/\sqrt{900}} = 2.5758\\ \Longleftrightarrow\ & \varepsilon = 2.5758 \times \frac{9.9}{\sqrt{900}} = \frac{2.5758 \times 9.9}{30} = 0.85.\end{aligned}$$

よって，信頼限度は $146.6 \pm 0.85$ であるから，信頼区間は

$$\mathbf{[145.75, 147.45]}$$

である．【5 点】

**5** ある精密機器メーカーでは，直径の平均が $\mu = 3.32$ cm，標準偏差 $\sigma = 0.03$ cm のネジを製造していた．ある日，10 個のネジを任意に抽出したら，直径の平均が 3.35 cm であった．このボルトの製造機械は正常に動作しているだろうか？有意水準 1% で検定しなさい．

(1) 帰無仮説 $H_0$ を「直径の平均は $\mu = 3.32$cm である」とする．【1 点】

(2) 対立仮説 $H_1$ は「$\mu = \mu_1 \neq 3.32$cm である」．【1 点】

(3) 10 個の標本平均 $X = \frac{1}{10}(X_1 + \cdots + X_{10})$ を考えると，これは $N(\mu, 0.03^2/10)$ に従う．【1 点】

(4) 対立仮説の設定から，両側検定する．よって，棄却域は

$P(|Z| > k) = 0.01$ を満たす $Z$ の全体

となる（ただし，$Z$ は $N(0,1)$ に従う確率変数）．

$$\begin{aligned}0.01 =& P(|Z| > k) = 2P(k < Z)\\ =& 2(0.5 - P(0 \leqq Z \leqq k)) = 2(0.5 - \Phi(k))\end{aligned}$$

$$\therefore \Phi(k) = 0.5 - \frac{0.01}{2} = 0.495$$

$$\therefore\ k = 2.5758. \qquad 【3 点】$$

よって，棄却域の不等式は

$$\begin{aligned}|Z| > 2.5758 \iff& \left|\frac{\bar{X} - 3.32}{0.03/\sqrt{10}}\right| > 2.5758\\ \iff& |\bar{X} - 3.32| > 2.5758 \times \frac{0.03}{\sqrt{10}} = 0.024436\end{aligned}$$

である．つまり，棄却域 $W$ は

$$|w - 3.32| > 0.024436$$

を満たす $w$ の全体である．

(5) 今，サイズ 10 の実測値が 3.35 だが，これは

$$|3.35 - 3.32| = 0.03 > 0.024436$$

より，棄却域に含まれるので，**$H_0$ は棄却される**．つまり，製造機械は正常に動作しているとはいえない．【4 点】