3 同次座標系による透視投影

3.1 透視投影の一般的表示（直交座標系）

視点を $\mathrm{S}(s_1, s_2, s_3)$, 投影面を yz-平面とする透視投影を考える．$\mathrm{P}(x, y, z)$ の投影像を求めてみよう．

- 2 点 $\mathrm{S}(s_1, s_2, s_3)$ と $\mathrm{P}(x, y, z)$ を結ぶ直線 ℓ のパラメーター表示は, ...

- ℓ と yz-平面の交点は, ...

3.2 透視投影の一般的表示（同次座標系）

上で求めた透視投影による像を同次座標に変換すると,...

事実

投影面が yz-平面の透視投影を考える．視点の同次座標を $(\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_0)$ とするとき, 点 $\mathrm{P}(\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu_0)$ の透視投影による像は

である．

例題 3.1. S$(1,2,3)$ を視点とし, 投影面を yz-平面とする透視投影を Φ とする．点 P$(-1,\frac{1}{2},1)$ に対し, 以下の問に答えなさい.

(1) 点 S, P を同次座標で表しなさい.

(2) 同次座標系において透視投影 Φ を表す 4 次正方行列を求めなさい.

(3) 透視投影 Φ による点 P の像 Φ(P) を求め, 同次座標で表しなさい.

(4) (3) で求めた Φ(P) の同次座標を直交座標に直しなさい.

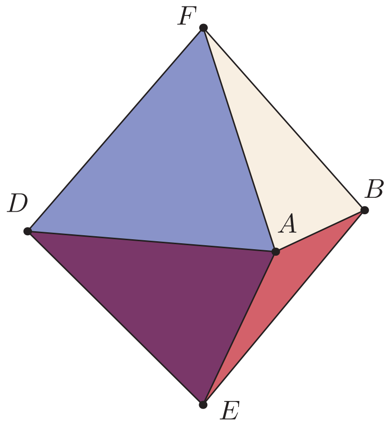
解. (1) 例えば S$(1:2:3:1)$, P$(-2:1:2:2)$ など[*1].

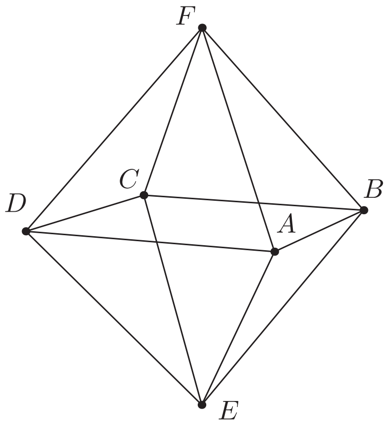
(2) (1) で定めた S の同次座標に対して, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \therefore (0:-5:-8:-4)$

(4) 同次座標から直交座標に直すには, 同次座標の第 4 成分を取り除き, 他の成分は第 4 成分で割った値にすればよい．したがって, $\underline{(0,\frac{5}{4},2)}$ [*2].

問題 3.2. 視点が $S(10,3,\frac{1}{2})$, 投影面が yz-平面の透視投影を Φ とする．6 個の点 $A(1,1,3)$, $B(-1,1,3)$, $C(-1,-1,3)$, $D(1,-1,3)$, $E(0,0,\frac{3}{2})$, $F(0,0,\frac{9}{2})$ を頂点とする 8 面体を Φ で移した像のワイヤーフレームを yz-平面に書きなさい.





[*1] 同次座標系による表し方は一意的ではない．S と同様に, P の第 4 の座標を 1 としてよいが, ここではすべての座標の値が整数となるようにした（整数の方が計算が簡単になるのため）.

[*2] (1) から (3) までの解は同次座標の決め方に依るが, 投影像の直交座標表示は一意的に決まる.