2 同次座標系とは

2.1 同次座標の定義

- 空間の点 (x, y, z) の同次座標とは, ...

問題 2.1. 点 $(10, 8, 6)$ の同次座標を次の中からすべて選びなさい.
（ア） $(1 : 8 : 6 : 1)$ （イ） $(10 : 8 : 6 : 0)$ （ウ） $(5 : 4 : 3 : 2)$ （エ） $(5 : 4 : 3 : \frac{1}{2})$

問題 2.2. 同次座標表示された次の各点の直交座標を求めなさい.

(1) $(3 : -3 : 6 : 4)$
(2) $(1 : -2 : 3 : \frac{1}{2})$
(3) $(0 : 0 : 0 : 3)$
(4) $(\frac{1}{2} : 3 : -6 : 2)$

2.2 1 次変換の同次座標表示

- 行列 A が表す 1 次変換 $f_A(\vec{p}) = A\vec{p}$ を同次座標系で表すと,...

問題 2.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えなさい.

(1) AB, B^{-1}, $\bar{A}\bar{B}$, および $\bar{B} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を求めなさい.
(2) 行列 A で表される 1 次変換による点 $\mathrm{P}(1, -\frac{1}{2})$ の像を求めなさい.
(3) 点 P を適当に 2 通り同次座標表示し, 行列 $\bar{A}$ をかけなさい. また, それらを直交座標に直しなさい.

2.3 平行移動の同次座標表示

- ベクトル $\vec{v}$ 方向の平行移動 $f_{\vec{v}}(\vec{p}) = \vec{p} + \vec{v}$ を同次座標系で表すと,...

問題 2.4. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えなさい.

(1) $f_{\vec{u}} \circ f_{\vec{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めなさい.

(2) $f_{\vec{v}} \circ f_{-\vec{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めなさい.

問題 2.5. $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えなさい.

(1) UV を求めなさい.

(2) $V\bar{V}$ を求めなさい.

まとめ

同次座標系においては, 1 次変換も平行移動も行列の積として表すことができる. さらに, それらの逆変換 f^{-1} を表す行列は, f を表す行列の逆行列である.