4 問題の解答

問題 1.1. 表し方は一意ではないことに注意.

(1) $\vec{p}(t) = (3-2t, 3-t, 7-6t)$ (2) $\vec{p}(t) = (2t+1, 2, 3-2t)$ (3) $\vec{p}(t) = (4t-3, -2t, 4-2t)$

問題 1.2.

(1) xy-平面との交点は $(\frac{2}{3}, \frac{11}{6}, 0)$, yz-平面との交点は $(0, \frac{3}{2}, -2)$, zx-平面との交点は $(-3, 0, -11)$.
(2) xy-平面との交点は $(4, 2, 0)$, yz-平面との交点は $(0, 2, 4)$, zx-平面との交点は存在しない.
(3) xy-平面との交点は $(5, -4, 0)$, yz-平面との交点は $(0, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, zx-平面との交点は $(-3, 0, 4)$.

問題 1.3.

(1) $(1, 1, 1)$ と視点 $(10, 8, 6)$ を結ぶ直線のパラメーター表示は $(9t+1, 7t+1, 5t+1)$ である. この直線と yz-平面との交点は, $t = -\frac{1}{9}$ のときなので, $(0, \frac{2}{9}, \frac{4}{9})$ が投影像である.
(2) $(1, -1, 7)$ と視点 $(10, 8, 6)$ を結ぶ直線のパラメーター表示は $(9t+1, 9t-1, -t+7)$ である. この直線と yz-平面との交点は, $t = -\frac{1}{9}$ のときなので, $(0, -2, \frac{10}{9})$ が投影像である.
(3) $(3, 8, 6)$ と視点 $(10, 8, 6)$ を結ぶ直線のパラメーター表示は $(7t+3, 8, 6)$ である. この直線と yz-平面との交点は, $t = -\frac{3}{7}$ のときなので, $(0, 8, 6)$ が投影像である.

問題 2.1. (エ)

問題 2.2. (1) $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$ (2) $(2, -4, 6)$ (3) $(0, 0, 0)$ (4) $(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}, 3)$

問題 2.3.

(1) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\bar{A}\bar{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\bar{B}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad \therefore\ (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$

(3) 点 P の同次座標を $(1 : -\frac{1}{2} : 1)$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore (-\frac{1}{2} : -\frac{5}{2} : 1)$$

よって, これを直交座標に直すと, $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ となる.
一方, P の同次座標を $(2 : -1 : 2)$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \therefore (-1 : -5 : 2)$$

よって, これを直交座標に直すと, $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ となる.

問題 2.4.

(1) $f_{\vec{u}} \circ f_{\vec{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y+2 \end{pmatrix} = f_{\vec{u}+\vec{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(2) $f_{\vec{v}} \circ f_{-\vec{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

問題 2.5. (1) $UV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $V\bar{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 3.2. 視点 S の同次座標を $(20:6:1:2)$ とすると, yz-平面への透視投影は行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -20 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -20 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$ の積である. 6 点の同次座標を $\mathrm{A}(1:1:3:1)$, $\mathrm{B}(-1:1:3:1)$, $\mathrm{C}(-1:-1:3:1)$, $\mathrm{D}(1:-1:3:1)$, $\mathrm{E}(0:0:3:2)$, $\mathrm{F}(0:0:9:2)$ とすると,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -20 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -20 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ -59 \\ -18 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -20 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -20 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -26 \\ -61 \\ -22 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -20 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -20 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -61 \\ -22 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -20 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -20 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 26 \\ -59 \\ -18 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -20 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -20 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -60 \\ -40 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -20 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -20 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -180 \\ -40 \end{pmatrix}.$$

よって, 投影像はそれぞれ $(0, \frac{7}{9}, \frac{59}{18})$, $(0, \frac{13}{11}, \frac{61}{22})$, $(0, -\frac{7}{11}, \frac{61}{22})$, $(0, -\frac{13}{9}, \frac{59}{18})$, $(0, 0, \frac{3}{2})$, $(0, 0, \frac{9}{2})$ となる.