科 目 名　線形代数学 II　　出 題 者 名　佐藤 弘康

1 $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ とする．次の問に答えなさい．

(1) ベクトル $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{r}$ の成分と大きさを求めなさい．

$$\begin{aligned}\vec{a}+2\vec{b}-\vec{r} &= \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\\ &= \underline{\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}}.\end{aligned}$$

大きさは $\sqrt{8^2+1^2}=\sqrt{64+1}=\underline{\sqrt{65}}$.

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\\ |\vec{b}| &= \sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13},\\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= 1\cdot 3+(-1)\cdot 2=3-2=1.\end{aligned}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{26}}}.$$

(3) $\vec{a}+k\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が直交するような k の値を求めなさい．

$(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ となるような k の値を求めればよい．
内積の演算規則より，

$$\begin{aligned}(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) &= \vec{a}\cdot\vec{a}+(k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-k\vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= |\vec{a}|^2+(k-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-k|\vec{b}|^2\\ &= (\sqrt{2})^2+(k-1)\times 1-k(\sqrt{13})^2\\ &= 2+k-1-13k=1-12k.\end{aligned}$$

よって，$\underline{k=\frac{1}{12}}$ である．

(4) $3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{a}, \vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$ を満たす $\vec{x},\vec{y}$ を求めなさい．

ベクトルを形式的にただの文字とみなし，連立方程式

$$\begin{cases}3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{a}\\ \vec{x}-\vec{y}=\vec{b}\end{cases}\quad \text{すなわち}\quad \begin{pmatrix}3&-2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}\\\vec{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\end{pmatrix}$$

を解けばよい．

$$\begin{pmatrix}\vec{x}\\\vec{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\end{pmatrix}$$

より，$\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}=\underline{\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}}$, $\vec{y}=\vec{a}-3\vec{b}=\underline{\begin{pmatrix}-8\\-7\end{pmatrix}}$.

2 次の問に答えなさい．

(1) $\begin{vmatrix}1&4\\-2&2-x\end{vmatrix}=0$ を満たす x を求めなさい．

$$\begin{vmatrix}1&4\\-2&2-x\end{vmatrix}=1\times(2-x)-4\times(-2)=2-x+8=10-x.$$

よって，上記の行列式が 0 となるのは，$\underline{x=10}$ のときである．
（部分点なし）

(2) $\begin{vmatrix}1&3&-2\\-2&-6&4\\0&2&2\end{vmatrix}=0$ である．その理由を述べなさい．

第 1 行と第 2 行が比例している，つまり，第 2 行は第 1 行の (-2) 倍なので，行列式の性質より，行列式の値は 0 となる．
【別解】サラスのの公式等を用いて，実際に行列式の値を計算してもよい．

(3) $\begin{vmatrix}1&3&-2\\-2&3&4\\0&2&2\end{vmatrix}$ を求めなさい．

サラスの公式を用いて求めてもよいが，ここでは，行列式の性質を用いた計算例を述べる．

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1&3&-2\\-2&3&4\\0&2&2\end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix}1&3&-2\\-2&3&4\\0&1&1\end{vmatrix}\\ &= 2\begin{vmatrix}1&3&-2\\0&9&0\\0&1&1\end{vmatrix}\\ &= 2\times 9\begin{vmatrix}1&3&-2\\0&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\\ &= 2\times 9\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}\\ &= 18\times 1\times 1\times 1\\ &= \underline{18}.\end{aligned}$$

（サラスの公式のみを用いて計算している場合は部分点なし）

3 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とし，行列 $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を g とする．次の問に答えなさい．

(1) f による点 P(3, 2) の像を求めなさい．

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 4\end{pmatrix}.$$

よって，求める像は 点 $(9,4)$ である．
（部分点なし）

(2) g による点 Q の像が 点 P(3, 2) であるとする．このとき，点 Q の座標を求めなさい．

仮定より，$g(Q)=P$ であるから，$Q=g^{-1}(P)$ である．

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}11\\ 1\end{pmatrix}$$

より，点 Q の座標は，$\left(\frac{11}{7},\frac{1}{7}\right)$ である．

(3) 合成変換 $f\circ g$ による点 P(3, 2) の像を求めなさい．

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31\\ -1\end{pmatrix}.$$

4 1 次変換 f によって，点 $(1,1)$ は点 $(1,-2)$ に移り，点 $(1,-1)$ は点 $(3,1)$ に移るとする．このとき，f を表す行列を求めなさい．

f を表す行列を A とすると，仮定より，

$$A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix},$$

すなわち，

$$A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\\ &=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\ &=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5 行列 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする．f の逆変換 f^{-1} があれば，f^{-1} を表す行列を求めなさい．

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1\times 2-2\times 3=2-6=-4\neq 0$$

より，f の逆変換は存在する．f^{-1} を表す行列は

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

6 xy-平面内の方程式 $2x-3y=4$ で表される直線を ℓ とする．次の行列によって表される 1 次変換によって，ℓ がどのような図形に移るか詳細に述べなさい．

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

方程式 $2x-3y=4$ において，$y=2t$ とおくと

$$2x=3\times 2t+4=2(3t+2)\qquad \therefore x=3t+2$$

となるので，直線 ℓ 上の点は $(3t+2,2t)$ と表すことができる．これを 1 次変換すると

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3t+2\\ 2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7t+2\\ 13t+6\end{pmatrix},$$

$$\therefore \begin{cases}X=7t+2\\ Y=13t+6\end{cases}$$

となる．この 2 式から t を消去すると

$$13X-7Y=2\times 13-6\times 7=26-42=-16$$

となる．よって，ℓ の像は 直線 $13x-7y=-16$ である．

(2) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 6\end{pmatrix}$

(1) と同様に直線 ℓ 上の点を $(3t+2,2t)$ と表し，1 次変換すると

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3t+2\\ 2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -8\end{pmatrix}$$

となるので，ℓ の像は 点 $(4,8)$ である．

配点

- 各問 3 点とする（3 点 ×14 問．ただし点数の上限は 40 点）．
- 軽微な計算間違いがあっても，概ね考え方が正しければ 2 点加点する（つまり，1 点減点）．