平成 29 年度 春 秋 定期末試験問題・解答

試験実施日　平成 30 年 1 月 22 日 1 時限

出題者記入欄

試験科目名　線形代数学 II	出題者名　佐藤 弘康
試験時間　60 分	平常授業日　月 曜日　1 時限

持ち込みについて　可　不可

可、不可のいずれかに○印をつけ
持ち込み可のものを○で囲んでください

教科書 ・ 参考書 ・ ノート (手書きのみ ・ コピーも可) ・ 電卓 ・ 辞書
その他（　　　　　　　　　）

本紙以外に必要とする用紙　解答用紙　0　枚　計算用紙　0　枚

通信欄

最後のページに中間試験の追試問題がある（10 点満点）．中間試験が 24 点未満だった者に対し，中間試験の点数に加点するが，上限は 24 点とする．さらに，追試の点を加えなくても評価が「C」の場合は，追試の点数を加点しない．

受験者記入欄

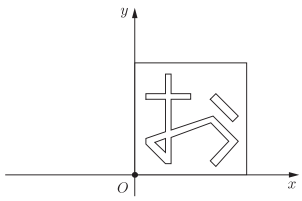
学科	学年	クラス	学籍番号	氏名

採点者記入欄

採点欄	評価

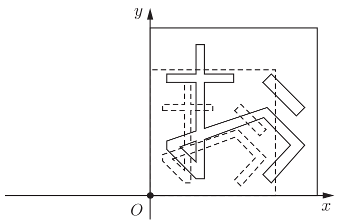
1 次の (1)〜(4) の各図は, 平面における 1 次変換によって (0) の図を変換した像である. 各 1 次変換の名称を（ア）〜（ク）の中から, 1 次変換を表す行列を（あ）〜（か）の中からそれぞれ選び, 図右の解答欄に書きなさい.

(0)



解答欄

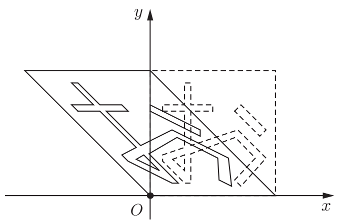
(1)



名称 ______

行列 ______

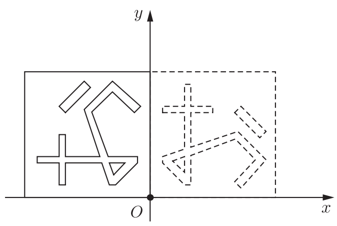
(2)



名称 ______

行列 ______

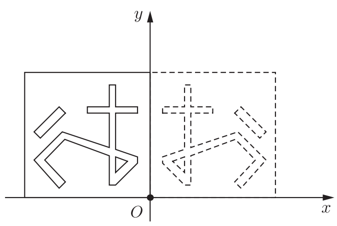
(3)



名称 ______

行列 ______

(4)



名称 ______

行列 ______

選択肢：名称

（ア）せん断　（イ）回転　（ウ）平行投影

（エ）恒等変換　（オ）平行移動　（カ）相似変換

（キ）透視投影　（ク）鏡映（対称変換）

選択肢：行列

（あ）$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　（い）$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　（う）$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

（え）$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　（お）$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　（か）$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

2 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の各問に答えなさい.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) A を対角化しなさい.

3 次の文章を読み, 空欄 (a)〜(f) に当てはまる最も適切な語句を選択肢（ア）〜（サ）の中から選びなさい（ただし, π は円周率ではなく, 図形を表す記号として用いている）.

透視投影（または透視図法, 遠近法）とは, 3 次元の物体を $\boxed{\text{(a)}}$ 描くための図法である. 透視投影によって書かれた絵は結果的に $\boxed{\text{(b)}}$ 描かれる. 実際の空間では平行な直線であっても, 透視投影によって描かれた図では交点をもつことがある. このような点を $\boxed{\text{(c)}}$ という.

数学的には, 空間内の定点 S（視点）と $\boxed{\text{(d)}}$ π（投影面）から定まる点の変換 Φ で, 空間内の点 P を π 上の点 $\Phi(\mathrm{P})$ に対応させる. $\Phi(\mathrm{P})$ は以下のように定義される; (i) 視点 S と変換したい点 P の 2 点を結ぶ $\boxed{\text{(e)}}$ を考え, (ii) その $\boxed{\text{(e)}}$ と π との交点を $\Phi(\mathrm{P})$ と定める.

同次座標を考えることにより, 透視投影は $\boxed{\text{(f)}}$ として表現することができる. 同次座標とは, 空間内の点 (x, y, z) を

$$\frac{X}{W} = x, \quad \frac{Y}{W} = y, \quad \frac{Z}{W} = z$$

を満たす 4 つの数の組 $(X : Y : Z : W)$ で表したものである. 直交座標系においては, 1 点の座標は一意に決まるが, 同次座標は無数に存在する. 視点の同次座標を $(a : b : c : d)$ とするとき, 投影面 yz-平面への透視投影による点 $\mathrm{P}(X : Y : Z : W)$ の像は

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$$

によって求めることができる.

選択肢

（ア）点 （イ）直線 （ウ）平面 （エ）空間 （オ）視点

（カ）消失点 （キ）平行移動 （ク）行列の積

（ケ）遠くの物は薄く, 近くの物は濃く

（コ）遠くの物は小さく, 近くの物は大きく

（サ）見た通りに 2 次元平面に

解答欄

(a) ＿＿＿＿ (b) ＿＿＿＿ (c) ＿＿＿＿

(d) ＿＿＿＿ (e) ＿＿＿＿ (f) ＿＿＿＿

4 視点が $S(10, 3, \frac{1}{2})$, 投影面が yz-平面の透視投影を Φ とする. このとき, 次の問に答えなさい.

(1) 点 $\mathrm{P}(1, 1, \frac{1}{3})$ の透視投影 Φ による投影像 $\Phi(\mathrm{P})$ を求め, 直交座標で答えなさい.

(2) 2 点 $\mathrm{P}(1, 1, \frac{1}{3})$, $\mathrm{Q}(6, 2, 1)$ を通る空間内の直線を ℓ とする. 透視投影 Φ による ℓ の投影像は yz-平面内のどのような図形になるか詳細に述べなさい.

中間試験の追試問題

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする．f による点 P の像が $(2, 3)$ であるとき, P の座標を求めなさい.

(2) 1 次変換 f によって, 点 $(1, -2)$ は点 $(1, 1)$ に移り, 点 $(3, 1)$ は点 $(1, -1)$ に移るとする．このとき, f を表す行列を求めなさい.

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & k \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする. f の逆変換 f^{-1} が存在しないとき, k の値を求めなさい.

(4) xy-平面内の方程式 $3x - 2y = 4$ で表される直線を ℓ とする．行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換によって, ℓ がどのような図形に移るか詳細に述べなさい.