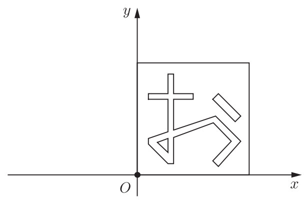
科 目 名 線形代数学 II 出 題 者 名 佐藤 弘康

1 次の (1)～(4) の各図は, 平面における 1 次変換によって (0) の図を変換した像である. 各 1 次変換の名称を（ア）～（ク）の中から, 1 次変換を表す行列を（あ）～（か）の中からそれぞれ選び, 図右の解答欄に書きなさい.

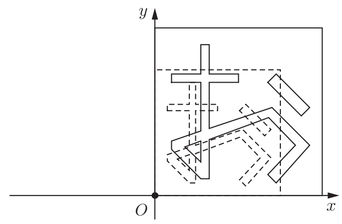
【各 1 点】

(0)



解答欄

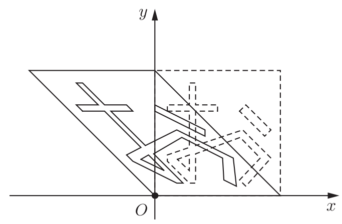
(1)



名称（カ）

行列（か）

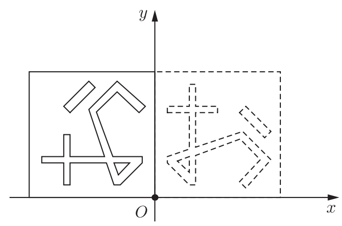
(2)



名称（ア）

行列（え）

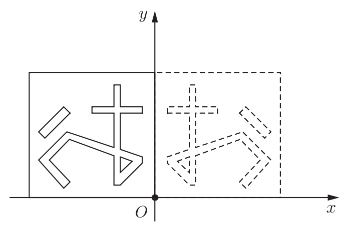
(3)



名称（イ）

行列（あ）

(4)



名称（ク）

行列（お）

選択肢：名称

（ア）せん断	（イ）回転	（ウ）平行投影
（エ）恒等変換	（オ）平行移動	（カ）相似変換
（キ）透視投影	（ク）鏡映（対称変換）	

選択肢：行列

（あ）$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ （い）$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ （う）$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

（え）$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ （お）$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ （か）$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

2 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の各問に答えなさい.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 9 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ &= (\lambda - 5)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

よって, 固有値は $\boldsymbol{\lambda = -1, 5}$ である.【2 点】

$\lambda = -1$ に属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, $c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である.【2 点】

$\lambda = 5$ に属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より, $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.【2 点】

（ただし, c は 0 でない任意の実数）

(2) A を対角化しなさい.

A の固有ベクトルをならべた行列を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 【3 点】$$

とおくと, これは正則行列で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

となる. 【3 点】

3 次の文章を読み, 空欄 (a)〜(f) に当てはまる最も適切な語句を選択肢（ア）〜（サ）の中から選びなさい（ただし, π は円周率ではなく, 図形を表す記号として用いている）. 【各 2 点】

透視投影（または透視図法, 遠近法）とは, 3 次元の物体を $\boxed{\text{(a)}}$ 描くための図法である. 透視投影によって書かれた絵は結果的に $\boxed{\text{(b)}}$ 描かれる. 実際の空間では平行な直線であっても, 透視投影によって描かれた図では交点をもつことがある. このような点を $\boxed{\text{(c)}}$ という.

数学的には, 空間内の定点 S（視点）と $\boxed{\text{(d)}}$ π（投影面）から定まる点の変換 Φ で, 空間内の点 P を π 上の点 $\Phi(\mathrm{P})$ に対応させる. $\Phi(\mathrm{P})$ は以下のように定義される; (i) 視点 S と変換したい点 P の 2 点を結ぶ $\boxed{\text{(e)}}$ を考え, (ii) その $\boxed{\text{(e)}}$ と π との交点を $\Phi(\mathrm{P})$ と定める.

同次座標を考えることにより, 透視投影は $\boxed{\text{(f)}}$ として表現することができる. 同次座標とは, 空間内の点 (x, y, z) を

$$\frac{X}{W} = x, \quad \frac{Y}{W} = y, \quad \frac{Z}{W} = z$$

を満たす 4 つの数の組 $(X : Y : Z : W)$ で表したものである. 直交座標系においては, 1 点の座標は一意に決まるが, 同次座標は無数に存在する. 視点の同次座標を $(a : b : c : d)$ とするとき, 投影面 yz-平面への透視投影による点 $\mathrm{P}(X : Y : Z : W)$ の像は

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$$

によって求めることができる.

選択肢

（ア）点 （イ）直線 （ウ）平面 （エ）空間 （オ）視点

（カ）消失点 （キ）平行移動 （ク）行列の積

（ケ）遠くの物は薄く, 近くの物は濃く

（コ）遠くの物は小さく, 近くの物は大きく

（サ）見た通りに 2 次元平面に

解答欄

(a) （サ） (b) （コ） (c) （カ）

(d) （ウ） (e) （イ） (f) （ク）

4 視点が $S(10, 3, \frac{1}{2})$, 投影面が yz-平面の透視投影を Φ とする. このとき, 次の問に答えなさい.

(1) 点 $\mathrm{P}(1, 1, \frac{1}{3})$ の透視投影 Φ による投影像 $\Phi(\mathrm{P})$ を求め, 直交座標で答えなさい.

視点 S の同次座標を (20 : 6 : 1 : 2), 点 P の同次座標を (3 : 3 : 1 : 3) とすると, yz-平面への透視投影像は

$$\Phi(\mathrm{P}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -20 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -20 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -42 \\ -17 \\ -54 \end{pmatrix}$$

となる. この点の直交座標は

$$\left(0, \frac{7}{9}, \frac{17}{54}\right)$$

である. 【4 点】

（点 S, または P の直交座標を同次座標に直すことができれば, 部分点【2 点】を与える）

(2) 2 点 $\mathrm{P}(1, 1, \frac{1}{3})$, $\mathrm{Q}(6, 2, 1)$ を通る空間内の直線を ℓ とする. 透視投影 Φ による ℓ の投影像は yz-平面内のどのような図形になるか詳細に述べなさい.

透視投影とは, 「3 次元の物体を見た通りに 2 次元平面に描画する」ことである. 空間内の直線は, 直線と視点の位置関係により, 直線か, または点に見える. 直線上の適当な 2 点 P, Q を選び, それらの投影像 $\Phi(\mathrm{P}), \Phi(\mathrm{Q})$ が異なる点ならば, 直線の像は直線となり, $\Phi(\mathrm{P}), \Phi(\mathrm{Q})$ が同一点ならば, 直線の像は 1 点となる.

(1) と同様に, 点 Q の同次座標を (6 : 2 : 1 : 1) とし, 投影像を求めると

$$\Phi(\mathrm{Q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -20 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -20 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -14 \\ -8 \end{pmatrix},$$

すなわち, 点 $(0, \frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ となる. よって, ℓ の透視投影による像 $\Phi(\ell)$ は, P, Q の像を通る yz-平面内の直線とな. $\Phi(\ell)$ の傾きは

$$\frac{\frac{17}{54} - \frac{7}{4}}{\frac{7}{9} - \frac{1}{2}} = -\frac{\frac{155}{108}}{\frac{5}{18}} = -\frac{31}{6}.$$

よって, 像の直線の方程式は

$$\begin{aligned} z &= -\frac{31}{6}\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{7}{4} \\ &= -\frac{31}{6}y + \frac{13}{3} \end{aligned}$$

となる. 【4 点】

中間試験の追試問題

【各 3 点】

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする．f による点 P の像が $(2,3)$ であるとき，P の座標を求めなさい．

仮定より，$f(\mathrm{P})=(2,3)$ であるから，$\mathrm{P}=f^{-1}(2,3)$ である．

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}&=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1&-3\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\\&=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-11\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

より，点 P の座標は $\left(\frac{11}{7},\frac{1}{7}\right)$ である．

(2) 1 次変換 f によって，点 $(1,-2)$ は点 $(1,1)$ に移り，点 $(3,1)$ は点 $(1,-1)$ に移るとする．このとき，f を表す行列を求めなさい．

f を表す行列を A とすると，仮定より，

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

すなわち，

$$A\begin{pmatrix}1&3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-2&1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\2&1\end{pmatrix}\\&=\underline{\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&-4\end{pmatrix}}.\end{aligned}$$

(3) 行列 $\begin{pmatrix}1&2\\3&k\end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする．f の逆変換 f^{-1} が存在しないとき，k の値を求めなさい．

1 次変換 f を表す行列を A とすると，f の逆変換 f^{-1} を表す行列は A の逆行列 A^{-1} である．A^{-1} が存在するための必要十分条件は，$|A|\neq 0$ であるから，f の逆変換 f^{-1} が存在しないとすると，$|A|=0$ でなければならない．

$$0=\begin{vmatrix}1&2\\3&k\end{vmatrix}=k-6$$

より，$\underline{k=6}$.

(4) xy-平面内の方程式 $3x-2y=4$ で表される直線を ℓ とする．行列 $\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換によって，ℓ がどのような図形に移るか詳細に述べなさい．

方程式 $3x-2y=4$ において，$x=2t$ とおくと

$$2y=3\times 2t-4=2(3t-2)\qquad \therefore y=3t-2$$

となるので，直線 ℓ 上の点は $(2t,3t+2)$ と表すことができる．これを 1 次変換すると

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2t\\3t-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8t-4\\12t-4\end{pmatrix},$$

$$\therefore\begin{cases}X=8t-4\\Y=12t-4\end{cases}$$

となる．この 2 式から t を消去すると

$$3X-2Y=-4\times 3-(-4)\times 2=-4$$

となる．よって，ℓ の像は $\underline{\text{直線 } 3x-2y=-4}$ である．