微分積分学 I

科目名 微分法　　出題者名 佐藤 弘康

1 次の関数を微分しなさい．【各 4 点】

(1) $y = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{x^2}{4}$

$$y' = 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$$

(2) $y = (3-2x)^9$

$$\begin{aligned} y' &= 9(3-2x)^{9-1} \times (-2) \\ &= -18(3-2x)^8 \end{aligned}$$

(3) $y = \sqrt{x-1}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$

$$\begin{aligned} y' &= \left\{(3-x)^{-\frac{1}{2}}\right\}' = -\frac{1}{2}(3-x)^{-\frac{1}{2}-1} \times (-1) \\ &= \frac{1}{2(3-x)\sqrt{3-x}} \end{aligned}$$

(5) $y = \sqrt{x^3 - x^2 + 3}$

$$y' = \frac{3x^2 - 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2 + 3}}$$

(6) $y = 1 + \sin^2 x$

$$y' = 2\sin x \cos x \ (= \sin 2x)$$

(7) $y = e^{2x+1}$

$$y' = 2e^{2x+1}$$

(8) $y = \log(3x-4)$

$$y' = \frac{3}{3x-4}$$

(9) $y = \dfrac{3x+1}{2x^2-1}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3x+1)'(2x^2-1) - (3x+1)(2x^2-1)'}{(2x^2-1)^2} \\ &= \frac{3(2x^2-1) - 4x(3x+1)}{(2x^2-1)^2} \\ &= -\frac{6x^2+4x+3}{(2x^2-1)^2} \end{aligned}$$

(10) $y = \dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x)'\sqrt{2x-1} - x\left(\sqrt{2x-1}\right)'}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2x-1} - \frac{2x}{2\sqrt{2x-1}}}{2x-1} \\ &= \frac{(2x-1)-x}{(2x-1)\sqrt{2x-1}} = \frac{x-1}{(2x-1)\sqrt{2x-1}} \end{aligned}$$

2 $(\log f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ を利用して，関数 $f(x) = 2^x$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

$f(x) = 2^x$ の両辺の対数をとると，$\log f(x) = \log 2^2 = x\log 2$ となる．この両辺を微分する．左辺は，

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

右辺は $\log 2$ であるから，$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \log 2$，すなわち，

$$f'(x) = f(x)\log 2 = \underline{2^x \log 2}$$

を得る．【4 点】

3 $y = \cos x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ の逆関数の導関数は，

$$\left(\cos^{-1} x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

である．これを利用して，関数 $f(x) = \cos^{-1}(2x+1)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

$g(t) = \cos^{-1} t$ とおくと，$f(x) = g(2x+1)$ である．合成関数の微分の公式より，

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(2x+1)\cdot(2x+1)' = -\frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{-4x^2-4x}} = \underline{-\frac{1}{\sqrt{-x(x+1)}}}. \end{aligned}$$

【4 点】

※ $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ については，最終的な解が間違っていても，微分の公式を正しく利用できていれば，4 点加点する．また，合計点の上限を【40 点】とする．

4 次の問に答えなさい．【各 5 点】

(1) 関数 $f(x)=2x-5$ に対し，$f^{-1}(3)$ の値を求めなさい．

$f^{-1}(3)=a$ とおくと，$f(a)=3$ が成り立つ．つまり，$2a-5=3$ より，$\underline{a=4}$ である．

(2) 関数 $g(x)$ の逆関数 $g^{-1}(x)$ が存在し，$g^{-1}(3)=-2$ であるとする．このとき，$g(-2)$ の値を求めなさい．

$g^{-1}(3)=-2$ は $g(-2)=3$ と同値である．よって，$\underline{3}$.

5 対数関数 $y=\log x$（ただし，$x>0$） は増加関数か減少関数か答えなさい．また，その理由も述べなさい．【5 点】

$x>0$ ならば，$\dfrac{1}{x}>0$ である．$y'=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ より，$y'>0$ である．よって，$\underline{y=\log x \text{ は増加関数}}$ である．

6 関数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ の増減を調べなさい．また，極値を求めなさい．【10 点】

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$$

より，$f'(x)=0$ となるのは $x=-1,3$ のときである．増減表は

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		7		-25	

となる． よって，$f(x)$ は $x<-1, 3<x$ で増加関数で，$-1<x<3$ で減少関数である．【5 点】
また，$x=-1$ のとき極大値 7 をとり，$x=3$ のとき極小値 -25 をとる．【5 点】

※ $\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}$ の加点の単位は 5 点だが，部分点として【3 点】加点することがある．

7 以下の文章を読んで，下の各問に答えなさい．

微分可能な関数 $f(x)$ と数 $x=a$ に対し，

$$g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \qquad (*)$$

を $f(x)$ の $x=a$ の近傍での 2 次近似式とよぶ．$g(x)$ は，

$$f(a)=g(a),\quad f'(a)=g'(a),\quad f''(a)=g''(a) \qquad (\sharp)$$

を満たす 2 次関数と特徴付けることができる．なお，$(*)$ の右辺の第 2 項までの 1 次式は，$f(x)$ の $x=a$ における $\boxed{\text{（あ）}}$ の方程式である．

次に，$(*)$ を用いて $\sqrt{1.2}$ の近似値を求める方法について述べる．$f(x)=\sqrt{1+x}$ とおくと，$\sqrt{1.2}=f(\boxed{\text{（ア）}})$ である．$f(x)$ の $x=0$ の近傍での 2 次近似式 $g(x)$ は

$$f(0)=1,\quad f'(0)=\boxed{\text{（イ）}},\quad f''(0)=\boxed{\text{（ウ）}}$$

より，

$$g(x)=1+\boxed{\text{（エ）}}$$

となる．よって，

$$\sqrt{1.2}=f(\boxed{\text{（ア）}})\approx g(\boxed{\text{（ア）}})=\boxed{\text{（オ）}}$$

と近似値が得られる．

(1) （あ）に当てはまる最も適切な語句を答えなさい．ただし，「1 次近似式」ではない．

（あ） 接線【2 点】

(2) （ア）～（オ）に当てはまる数または式を答えなさい．

（ア） 0.2

（イ） $\dfrac{1}{2}$

（ウ） $-\dfrac{1}{4}$

（エ） $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2$

（オ） 1.095【以上各 2 点】

(3) $x=a$ の近傍での 3 次近似式は，$(\sharp)$ および $f'''(a)=g'''(a)$ を満たす 3 次関数 $g(x)$ のことである．$f(x)=\sqrt{1+x}$ の $x=0$ の近傍での 3 次近似式を利用して $\sqrt{1.2}$ の近似値を計算しなさい．

$x=0$ における 3 次近似式は，2 次近似式に $\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3$ を加えたものなので，$f'''(x)=\dfrac{3}{8(1+x)^{\frac{5}{2}}}$ より，

$$\sqrt{1.2}\approx 1.095+\frac{(0.2)^3}{16}=\underline{1.0955}. \qquad 【5 点】$$

※ $\boxed{7}$ の合計点の上限を【15 点】とする．