複素関数論 レポート問題 No.2

（平成 29 年 12 月 25 日　担当：佐藤 弘康）

$\boxed{\mathbf{4}}$ 0 を始点とし, $1-i$ を終点とする線分を C, 0 を始点とし, 1 を終点とする線分を C_1, 1 を始点とし, $1-i$ を終点とする線分を C_2 とする. 関数 $f(z)=|z|^2$, $g(z)=z^2$ について次の問に答えなさい.

(1) $f(z)$ が正則でないことを示しなさい.

(2) $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めなさい.

(3) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz$ を求めなさい.

(4) 複素積分の定義にしたがって, $\displaystyle\int_C g(z)\,dz$, および $\displaystyle\int_{C_1+C_2} g(z)\,dz$ を求めなさい.

(5) $g(z)$ が正則かつ原始関数をもつことを利用して, $\displaystyle\int_C g(z)\,dz\ \left(=\int_{C_1+C_2} g(z)\,dz\right)$ を求めなさい.

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問に答えなさい.

(1) $z^2+2z+2=0$ の解が単位円周の内部の点か, 外部の点か調べなさい.

(2) コーシーの積分定理を利用して, $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+2z+2}dz$ を求めよなさい. ただし, C は単位円周とする.

$\boxed{\mathbf{6}}$ 複素積分

$$\int_C \frac{z}{(z-2i)(z+i)}dz$$

について以下の問に答えなさい. ただし, C は原点中心, 半径 $\sqrt{3}$ の円周とする.

(1) コーシーの積分定理[*1]を利用して上の積分を計算しなさい.

(2) コーシーの積分表示[*2]を利用して上の積分を計算しなさい.

[*1] 12 月 25 日の講義で説明した教科書 p.165 の例題 1(4) の別解の方法. 被積分関数を部分分数分解して 2 つの積分に分け, コーシーの積分定理（定理 3.3）および p.162 例題 2 を適用する.

[*2] 教科書 p.165 の例題 1(4) の解答を参照.