

平成 29 年度 ^春 _秋 定期末試験問題・解答

試験実施日 平成 30 年 1 月 22 日 4 時限

出題者記入欄

試験科目名 <u>複素関数論</u>		出題者名 <u>佐藤 弘康</u>	
試験時間 <u>60</u> 分	平常授業日 <u>月</u> 曜日 <u>4</u> 時限		
持ち込みについて 可 <input type="checkbox"/> 不可 <input checked="" type="checkbox"/> 可、不可のいずれかに○印をつけ 持ち込み可のものを○で囲んでください			
教科書・参考書・ノート(手書きのみ・コピーも可)・電卓・辞書 その他 ()			
本紙以外に必要とする用紙 解答用紙 <u>0</u> 枚 計算用紙 <u>0</u> 枚			
通信欄			

受験者記入欄

学 科	学 年	ク ラ ス	学 籍 番 号	氏 名

採点者記入欄

採 点 欄	評 価

1 2つの複素数 $z = 3 + i$, $w = 1 + i$ に対し、次を計算し、 $a + bi$ (ただし、 a, b は実数) の形にせよ。

(1) $z + w$

(2) zw

(3) $\frac{z}{w}$

2 次の文の空欄に当てはまる最も適切な数または式を答えなさい。

$$i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{2018} \left(= \sum_{k=1}^{2018} i^k \right) \quad (*)$$

の値を求めたい。 $i^1 = i$, $i^2 = \boxed{(1)}$, $i^3 = \boxed{(2)}$, $i^4 = \boxed{(3)}$ であるから、 i^k は i , $\boxed{(1)}$, $\boxed{(2)}$, $\boxed{(3)}$ の繰り返しとなる。

$$i + \boxed{(1)} + \boxed{(2)} + \boxed{(3)} = \boxed{(4)}$$

かつ、2018 を $\boxed{(5)}$ で割った余りは 2 であるから、(*) の値は $\boxed{(6)}$ となることわかる。

(1) _____ (2) _____ (3) _____

(4) _____ (5) _____ (6) _____

3 次の文章を読んで、下の各問に答えなさい。

複素数 $1 + \sqrt{3}i$ は

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad (\#)$$

と表すことができる。これは以下のようにして導くことができる; 複素数 $1 + \sqrt{3}i$ の $\boxed{(a)}$ は 2 であるから、 $1 + \sqrt{3}i$ を 2 でくくると

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

となる。 $\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \boxed{(b)}$ より、 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ が存在する。この θ を $1 + \sqrt{3}i$ の $\boxed{(c)}$ という。 $1 + \sqrt{3}i$ の場合は、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ である。以上のことから、 $(\#)$ を得る。

(1) 空欄に当てはまる最も適切な語句、数、または式を答えなさい。

(a) _____ (b) _____ (c) _____

(2) 一般の複素数 z の $\boxed{(a)}$ を表す式として正しいものを次の選択肢 (ア) ~ (エ) の中から選びなさい。

選択肢

(ア) z^2 (イ) $z\bar{z}$ (ウ) \bar{z}^2 (エ) $\sqrt{z\bar{z}}$

解答欄

(3) $(\#)$ を利用して、 $(1 + \sqrt{3}i)^8$ を $a + bi$ の形に直しなさい。

(4) $(\#)$ を利用して、 $1 + \sqrt{3}i$ の 2 乗根をすべて求めなさい。

4 次の関数 $f(z)$ が正則関数か否か判定し, 正則ならば導関数 $f'(z)$ を求めなさい. ただし, $z = x + yi$ とする (x, y は実変数) .

(1) $f(z) = z^2$

(2) $f(z) = x^2 + y^2 i$

(3) $f(z) = x^2 - y^2 + y + (2xy - x)i$

5 次の関数 $f(z)$ と曲線 C に対し, 複素積分 $\int_C f(z) dz$ を求めなさい.

(1) $f(z) = z + 2, C: z(t) = (1 + t) + it \quad (0 \leq t \leq 1)$

(2) $f(z) = \frac{1}{z-2}, C: \text{原点 } 0 \text{ を中心とする半径 } 1 \text{ の円}$

(3) $f(z) = \frac{z^3 - 1}{z - i}, C: \text{原点 } 0 \text{ を中心とする半径 } 2 \text{ の円}$

