科 目 名　複素関数論　　　出 題 者 名　佐藤 弘康

1 2 つの複素数 $z = 3 + i,\ w = 1 + i$ に対し，次を計算し，$a + bi$（ただし，a, b は実数）の形にしなさい．【各 6 点】

(1) $z + w$

$$= \mathbf{4 + 2}\boldsymbol{i}.$$

(2) zw

$$\begin{aligned} &=(3+i)(1+i) \\ &=3+4i+i^2 \\ &=3+4i+(-1) \\ &=\mathbf{2+4}\boldsymbol{i}. \end{aligned}$$

(3) $\dfrac{z}{w}$

$$\begin{aligned} &=\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &=\frac{3-2i-i^2}{1-i^2} = \frac{3-2i-(-1)}{1-(-1)} \\ &=\frac{4-2i}{2} = \frac{2(2-i)}{2} \\ &=\mathbf{2-}\boldsymbol{i}. \end{aligned}$$

2 次の文の空欄に当てはまる最も適切な数または式を答えなさい．【各 1 点】

$$i^1 + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2018} \left(= \sum_{k=1}^{2018} i^k \right) \qquad (*)$$

の値を求めたい．$i^1 = i,\ i^2 = \boxed{(1)},\ i^3 = \boxed{(2)},\ i^4 = \boxed{(3)}$ であるから，i^k は $i, \boxed{(1)}, \boxed{(2)}, \boxed{(3)}$ の繰り返しとなる．

$$i + \boxed{(1)} + \boxed{(2)} + \boxed{(3)} = \boxed{(4)}$$

かつ，2018 を $\boxed{(5)}$ で割った余りは 2 であるから，$(*)$ の値は $\boxed{(6)}$ となることがわかる．

(1) -1　(2) $-i$　(3) 1

(4) 0　(5) 4　(6) $i-1$

3 次の文章を読んで，下の各問に答えなさい．

複素数 $1 + \sqrt{3}i$ は

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \qquad (\sharp)$$

と表すことができる．これは以下のようにして導くことができる；複素数 $1 + \sqrt{3}i$ の $\boxed{(a)}$ は 2 であるから，$1 + \sqrt{3}i$ を 2 でくくると

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

となる．$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \boxed{(b)}$ より，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$，$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ が存在する．この θ を $1 + \sqrt{3}i$ の $\boxed{(c)}$ という．$1 + \sqrt{3}i$ の場合は，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ である．以上のことから，$(\sharp)$ を得る．

(1) 空欄に当てはまる最も適切な語句，数，または式を答えなさい．【各 2 点】

(a) 絶対値　(b) 1　(c) 偏角

(2) 一般の複素数 z の $\boxed{(a)}$ を表す式として正しいものを次の選択肢（ア）〜（エ）の中から選びなさい．

選択肢

（ア）z^2　（イ）$z\,\bar{z}$　（ウ）$\bar{z}^2$　（エ）$\sqrt{z\,\bar{z}}$

解答欄　（エ）【2 点】

(3) $(\sharp)$ を利用して，$(1 + \sqrt{3}i)^8$ を $a + bi$ の形に直しなさい．

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{3}i)^8 &= 2^8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^8 \\ &=256\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right) = 256\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ &=256\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \mathbf{128}\left(\boldsymbol{\sqrt{3}i - 1}\right). \end{aligned}$$

【6 点】

(4) $(\sharp)$ を利用して，$1 + \sqrt{3}i$ の 2 乗根をすべて求めなさい．

$1 + \sqrt{3}i$ の 2 乗根を $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと，

$$w^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから，$r^2 = 2,\ 2\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$ が成り立つ．よって，$r = \sqrt{2}, \theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}$，つまり，$1 + \sqrt{3}i$ の 2 乗根は

$$\boldsymbol{\pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)}.$$

【6 点】

日本工業大学

4 次の関数 $f(z)$ が正則関数か否か判定し，正則ならば導関数 $f'(z)$ を求めなさい．ただし，$z = x + yi$ とする（x, y は実変数）．【各 6 点】

(1) $f(z) = z^2$

z の多項式関数は正則である．導関数は，$f'(z) = 2z$.

(2) $f(z) = x^2 + y^2\, i$

$$\frac{\partial}{\partial x}x^2 = 2x \neq 2y = \frac{\partial}{\partial y}y^2$$

より，コーシー・リーマンの方程式を満たさないので，正則ではない．

(3) $f(z) = x^2 - y^2 + y + (2xy - x)i$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 + y) = 2x = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2 + y) = -2y + 1 = -\frac{\partial}{\partial x}(2xy - x)$$

より，コーシー・リーマンの方程式を満たすので，正則ではある．導関数は

$$\begin{aligned} f'(z) =& \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 + y) + \frac{\partial}{\partial x}(2xy - x)\, i \\ =& \boldsymbol{2x + (2y - 1)i}. \\ &(=2z - i) \end{aligned}$$

（実際に，$f(z) = z^2 - iz$ であり，これは多項式関数である．）

5 次の関数 $f(z)$ と曲線 C に対し，複素積分 $\int_C f(z)\, dz$ を求めなさい．【各 6 点】

(1) $f(z) = z + 2, \quad C : z(t) = (1 + t) + it \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

$f(z)$ は多項式関数なので複素数平面全域で正則である．よって，複素積分の値は曲線 C の端点 $z(0) = 1$, $z(1) = 2 + i$ にのみ依存する． 特に，$f(z)$ の原始関数 $F(z)$ が存在し，$F(z) = \frac{1}{2}z^2 + 2z$ なので，

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\, dz =& F(2+i) - F(1) = \frac{1}{2}(2+i)^2 + 2(2+i) - \left(\frac{1}{2} + 2\right) \\ =& \frac{1}{2}(4 + 4i - 1) + 4 + 2i - \frac{5}{2} = \boldsymbol{3 + 4i}. \end{aligned}$$

$z'(t) = 1 + i$ であるから，複素積分の定義より，

$$\int_C f(z)dz = \int_0^1 \{(1+t) + it + 2\}\,(1+i)\, dt$$

を計算しても結果は同様である（詳細は省略）．

(2) $f(z) = \dfrac{1}{z - 2}, \quad C$: 原点 0 を中心とする半径 1 の円

$f(z)$ は $z = 2$ を除く領域で正則関数である．C は単一閉曲線で $z = 2$ を内部に含まないので，コーシーの積分定理より，

$$\int_C f(z)\, dz = \boldsymbol{0}.$$

(3) $f(z) = \dfrac{z^3 - 1}{z - i}, \quad C$: 原点 0 を中心とする半径 2 の円

$f(z)$ は $z = i$ を除く領域で正則であるが，$|i| = 1$ より，これは単一閉曲線 C の内部にある．一方，分子の $g(z) := z^3 - 1$ は多項式関数なので，複素数平面全域で正則である．よって，コーシーの積分表示より，

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\, dz =& 2\pi i\, g(i) = 2\pi i\,(i^3 - 1) \\ =& 2\pi(i^4 - i) = \boldsymbol{2\pi\,(1 - i)}. \end{aligned}$$

（部分点） 配点が【6 点】の問題については，部分点として【3 点】加点することがある．