平成 29 年度 春 秋 中間試験問題・解答

試験実施日　　平成 29 年 11 月 16 日　1 時限

出題者記入欄

試験科目名 応用数学 II-J	**出題者名** 佐藤 弘康
試験時間 60 分	**平常授業日** 木 曜日 1 時限

持ち込みについて　　可　　不可

可、不可のいずれかに〇印をつけ
持ち込み可のものを〇で囲んでください

教科書 ・ 参考書 ・ ノート (手書きのみ ・ コピーも可) ・ 電卓 ・ 辞書
その他 (　　　　　　　　　　　　)

本紙以外に必要とする用紙　　解答用紙 0 枚　　計算用紙 0 枚

通信欄

受験者記入欄

学科	学年	クラス	学籍番号	氏名

採点者記入欄

採点欄	評価

問 次の**選択肢 A** の微分方程式について各問に答えなさい.

選択肢 A

(ア) $(y-x)\,dx+dy=0$

(イ) $(2y+3y^2)\,dx+(x+3xy)\,dy=0$

(ウ) $y^2\,dx-x^3\,dy=0$

(エ) $y(1-x^3y^2)\,dx+x\,dy=0$

(オ) $(2x+3y)\,dx+(3x+1)\,dy=0$

(カ) $(2x^2+y^2)\,dx-xy\,dy=0$

1 $y=e^{-x}+x-1$ が **(ア)** の解であることを示しなさい.

2 **選択肢 A** の中から，変数分離形微分方程式を選び，$\boldsymbol{g(y)\,dy=f(x)\,dx}$ の形に変形しなさい.

3 **選択肢 A** の中から, 線形微分方程式を選び，$\boldsymbol{y'+P(x)\,y=Q(x)}$ の形にしなさい（関数 $P(x),Q(x)$ を求めなさい）.

4 **選択肢 A** の中から, 同次形微分方程式を選び,

(1) $\boldsymbol{y'=f\left(\frac{y}{x}\right)}$ の形にしなさい（関数 $f(t)$ を求めなさい）.

(2) $u=\dfrac{y}{x}$ とおいて, u と x の変数分離形に変換しなさい.

5 **選択肢 A** の中から, 変数分離形でも線形でもないベルヌーイの微分方程式を選び,

(1) $\boldsymbol{y'+P(x)\,y=Q(x)\,y^n}$ の形にしなさい（関数 $P(x),Q(x)$ および数 n を求めなさい）.

(2) $u=y^{1-n}$ とおいて, u に関する線形微分方程式に変換しなさい.

6 **選択肢 A** の中から, 完全微分方程式を選び, 完全微分方程式であることを示しなさい.

7 **選択肢 A** の中で, $\boxed{2}$〜$\boxed{5}$ で選択されていない微分方程式について, 次の各問に答えなさい.

(1) 完全微分方程式でないことを示しなさい.

(2) $\lambda = x$ が積分因子であることを示しなさい.

8 **選択肢 A** の中から微分方程式を 2 つ選び, 初期条件 $(x, y) = (1, 2)$ を満たす特殊解を求めなさい.

平成 29 年度春秋中間試験問題・解答

試験実施日　　平成 29 年 11 月 16 日　1 時限

出題者記入欄

試験科目名 応用数学 II-J	出題者名 佐藤 弘康
試験時間 60 分	平常授業日 木 曜日 1 時限

持ち込みについて　可　不可

可、不可のいずれかに○印をつけ
持ち込み可のものを○で囲んでください

教科書 ・ 参考書 ・ ノート (手書きのみ ・ コピーも可) ・ 電卓 ・ 辞書
その他 (　　　　　　　　　　　　)

本紙以外に必要とする用紙　解答用紙 0 枚　計算用紙 0 枚

通信欄

受験者記入欄

学科	学年	クラス	学籍番号	氏名

採点者記入欄

採点欄	評価

科 目 名 応用数学 II-J 出 題 者 名 佐藤 弘康

問 次の**選択肢 A** の微分方程式について各問に答えなさい．

選択肢 A

(ア) $(y-x)\,dx + dy = 0$

(イ) $(2y+3y^2)\,dx + (x+3xy)\,dy = 0$

(ウ) $y^2\,dx - x^3\,dy = 0$

(エ) $y(1-x^3y^2)\,dx + x\,dy = 0$

(オ) $(2x+3y)\,dx + (3x+1)\,dy = 0$

(カ) $(2x^2+y^2)\,dx - xy\,dy = 0$

1 $y = e^{-x} + x - 1$ が **(ア)** の解であることを示しなさい．

(ア) は

$$y' + (y-x) = 0$$

と書ける．$y = e^{-x}+x-1$ がこの式を満たすことを示せばよい．$y' = -e^{-x}+1$ より，この式の右辺は

$$\begin{aligned} y' + (y-x) =& (-e^{-x}+1) + \left\{(e^{-x}+x-1) - x\right\} \\ =& (-e^{-x}+1) + (e^{-x}-1) = 0 \end{aligned}$$

となり，**(ア)** を満たすことがわかる．【3 点】

2 **選択肢 A** の中から，変数分離形微分方程式を選び，$\boldsymbol{g(y)\,dy = f(x)\,dx}$ の形に変形しなさい．

変数分離形は **(ウ)** のみである．【1 点】

$$\boldsymbol{\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^3}} \quad 【3 点】$$

3 **選択肢 A** の中から，線形微分方程式を選び，$\boldsymbol{y' + P(x)\,y = Q(x)}$ の形にしなさい（関数 $P(x), Q(x)$ を求めなさい）．

線形微分方程式は **(ア)** のみである．【1 点】
この方程式は $y' + y = x$ と書けるので

$$\boldsymbol{P(x) = 1, \quad Q(x) = x}$$

の場合の線形微分方程式である．【3 点】

4 **選択肢 A** の中から，同次形微分方程式を選び，

(1) $\boldsymbol{y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ の形にしなさい（関数 $f(t)$ を求めなさい）．

同次形は **(カ)** のみである．【1 点】
この方程式は $xy\,y' = 2x^2 + y^2$ と書ける．両辺を xy で割ると，

$$y' = 2\cdot\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \qquad (\textbf{カ}')$$

となるので，$\boldsymbol{f(t) = \dfrac{2}{t} + t}$ とおけば，$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ と書ける．【3 点】

(2) $u = \dfrac{y}{x}$ とおいて，u と x の変数分離形に変換しなさい．

$u = \dfrac{y}{x}$ とおくと，$y' = (xu)' = u + x\,u'$ となる．これらを $(\textbf{カ}')$ に代入すると

$$\begin{aligned} u + x\,u' = \frac{2}{u} + u \iff& xu' = \frac{2}{u} \\ \iff& \boldsymbol{u\,du = \frac{2}{x}\,dx} \end{aligned}$$

となる．【3 点】

5 **選択肢 A** の中から，変数分離形でも線形でもないベルヌーイの微分方程式を選び，

(1) $\boldsymbol{y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n}$ の形にしなさい（関数 $P(x), Q(x)$ および数 n を求めなさい）．

問題の条件を満たすベルヌーイの微分方程式は **(エ)** のみである．【1 点】
この方程式は $y' + \dfrac{1}{x}y = x^2y^3$ と書けるので

$$\boldsymbol{P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = x^2, \quad n = 3}$$

の場合のベルヌーイの微分方程式である．【3 点】

(2) $u = y^{1-n}$ とおいて，u に関する線形微分方程式に変換しなさい．

この方程式は $n=3$ の場合のベルヌーイの微分方程式なので,$u = y^{-2} = \dfrac{1}{y^2}$ とおくと，$u' = -\dfrac{2}{y^3}y'$ である．$y' = -\dfrac{y^3}{2}u'$ を代入すると，

$$\begin{aligned} -\frac{y^3}{2}u' + \frac{1}{x}y = x^3y^3 \iff& u' - \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y^2} = -2x^3 \\ \iff& \boldsymbol{u' - \frac{2}{x}u = -2x^3} \end{aligned}$$

となり，これは線形微分方程式である．【3 点】

$\boxed{6}$ **選択肢 A** の中から, 完全微分方程式を選び, 完全微分方程式であることを示しなさい.

完全微分方程式は **(オ)** のみである.【1 点】
$P(x,y)=2x+3y$, $Q(x,y)=3x+1$ とおくと, **(オ)** は

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

と書ける. このとき,

$$P_y(x,y)=3=Q_x(x,y)$$

であるから, **(オ)** は完全微分方程式である.【3 点】

$\boxed{7}$ **選択肢 A** の中で, $\boxed{2}$〜$\boxed{5}$ で選択されていない微分方程式について, 次の各問に答えなさい.

(1) 完全微分方程式でないことを示しなさい.

$\boxed{2}$〜$\boxed{5}$で選択されていないのは **(イ)** の微分方程式である.
$P(x,y)=2y+3y^2$, $Q(x,y)=x+3xy=x(1+3y)$ とおくと, **(イ)** は

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

と書ける. このとき,

$$P_y(x,y)=2+6y\neq 1+3y=Q_x(x,y)$$

であるから, **(オ)** は完全微分方程式ではない.【3 点】

(2) $\lambda=x$ が積分因子であることを示しなさい.

(イ) の両辺に x をかけると

$$x(2y+3y^2)\,dx+x^2(1+3y)\,dy=0 \qquad (\text{イ}')$$

となる. $\bar{P}(x,y)=x(2y+3y^2)$, $\bar{Q}(x,y)=x^2(1+3y)$ とおくと, **(イ′)** は

$$\bar{P}(x,y)\,dx+\bar{Q}(x,y)\,dy=0$$

と書くことができ, さらに

$$\bar{P}_y(x,y)=x(2+6y)=2x(1+3y)=\bar{Q}_x(x,y)$$

であるから, $\lambda=x$ は の積分因子である.

$\boxed{8}$ **選択肢 A** の中から微分方程式を 2 つ選び, 初期条件 $(x,y)=(1,2)$ を満たす特殊解を求めなさい.

(ア) $P(x)=1,\ Q(x)=x$ の場合の線形微分方程式なので,

$$\int P(x)\,dx=\int dx=x,$$
$$\int e^{\int P\,dx}Q(x)\,dx=\int e^x x\,dx=\int (e^x)'x\,dx$$
$$=x\,e^x-\int e^x(x)'\,dx$$
$$=x\,e^x-\int e^x\,dx=x\,e^x-e^x.$$

よって, 一般解は

$$y=e^{-x}\left(x\,e^x-e^x+c\right)=x-1+ce^{-x}$$

である. 初期条件を満たす特殊解は, $c=\dfrac{2}{e}$ のときなので, $\boldsymbol{y=x-1+2e^{1-x}}$.

(イ) この方程式は完全微分方程式ではないが, $\boxed{6}$ (2) より, 積分因子 $\lambda=x$ を両辺にかけた方程式 (**イ′**) は完全である. よって, 一般解の公式より,

$$\int_0^x P(t,y)\,dt+\int_0^y Q(0,t)\,dt=c$$
$$\iff \int_0^x t(2y+3y^2)\,dt+\int_0^y 0\cdot(1+3t)\,dt=c$$
$$\iff (2y+3y^2)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=c$$
$$\iff (2y+3y^2)\cdot\frac{x^2}{2}=c$$
$$\iff \boldsymbol{(2y+3y^2)x^2=C} \qquad (C=2c).$$

初期条件を満たす特殊解は, $\boldsymbol{(2y+3y^2)x^2=16}$.

(ウ) $\boxed{2}$ で求めた式の両辺を積分すると,

$$-\frac{1}{y}=-\frac{1}{2x^2}+c$$

となる(これが一般解). 初期条件を満たす特殊解は, $c=0$ のときなので, $\boldsymbol{y=2x^2}$.

（エ） $\boxed{5}$ (2) の変換で得られた線形微分方程式は，$P(x) = -\dfrac{2}{x}$，$Q(x) = -2x^3$ の場合であるから，

$$\begin{aligned}\int P(x)\,dx &= -2\int \frac{1}{x}\,dx = -2\log x = \log x^{-2},\\ \int e^{\int P\,dx} Q(x)\,dx &= \int e^{\log x^{-2}} \cdot (-2x^3)\,dx\\ &= -2\int x\,dx = -x^2.\end{aligned}$$

よって，

$$u = e^{\log x^2}\left(-x^2 + c\right) = x^2\left(-x^2 + c\right)$$

である．$u = \dfrac{1}{y^2}$ より，**（エ）** の一般解は

$$\mathbf{1 = y^2 x^2\left(-x^2 + c\right).}$$

初期条件を満たす特殊解は，$\boldsymbol{e^x = y\left(x\,e^x - e^x + \frac{e}{2}\right)}$.

（オ） この方程式は完全微分方程式なので，一般解の公式より，

$$\begin{aligned}&\int_0^x P(t,y)\,dt + \int_0^y Q(0,t)\,dt = c\\ \Longleftrightarrow\ &\int_0^x (2t+3y)\,dt + \int_0^y (3\cdot 0 + 1)\,dt = c\\ \Longleftrightarrow\ &\left[t^2 + 3yt\right]_0^x + [t]_0^y = c\\ \Longleftrightarrow\ &\boldsymbol{x^2 + 3xy + y = c}.\end{aligned}$$

また，初期条件を満たす特殊解は，$\boldsymbol{x^2 + 3xy + y = 9}$.

（カ） $\boxed{4}$ (2) で求めた変数分離形方程式の一般解は

$$\frac{1}{2}u^2 = 2\log x + c$$

であるから，**（カ）** の一般解は $y^2 = x^2(\log x^4 + C)$ である $(C = 2c)$．初期条件を満たす特殊解は $\boldsymbol{y^2 = x^2(\log x^4 + 4)}$.