科 目 名 応用数学 II-J　出 題 者 名 佐藤 弘康

問 次の**選択肢 A** の微分方程式について各問に答えなさい．

選択肢 A

(ア) $(y-x)\,dx + dy = 0$

(イ) $(2y+3y^2)\,dx + (x+3xy)\,dy = 0$

(ウ) $y^2\,dx - x^3\,dy = 0$

(エ) $y(1-x^3y^2)\,dx + x\,dy = 0$

(オ) $(2x+3y)\,dx + (3x+1)\,dy = 0$

(カ) $(2x^2+y^2)\,dx - xy\,dy = 0$

1 $y = e^{-x} + x - 1$ が **(ア)** の解であることを示しなさい．

(ア) は

$$y' + (y-x) = 0 \qquad (\text{ア}')$$

と書ける．$y = e^{-x}+x-1$ がこの式を満たすことを示せばよい．$y' = -e^{-x}+1$ より，(**ア**$'$) の左辺は

$$\begin{aligned} y' + (y-x) &= (-e^{-x}+1) + \{(e^{-x}+x-1)-x\} \\ &= (-e^{-x}+1) + (e^{-x}-1) = 0 \end{aligned}$$

となり，**(ア)** を満たすことがわかる．【3 点】

2 **選択肢 A** の中から，変数分離形微分方程式を選び，$\boldsymbol{g(y)\,dy = f(x)\,dx}$ の形に変形しなさい．

変数分離形は **(ウ)** のみである．【1 点】
変数を左辺と右辺で分離すると

$$\boldsymbol{\frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{x^3}dx} \qquad (\text{ウ}')$$

となる．【3 点】

3 **選択肢 A** の中から，線形微分方程式を選び，$\boldsymbol{y' + P(x)\,y = Q(x)}$ の形にしなさい（関数 $P(x), Q(x)$ を求めなさい）．

線形微分方程式は **(ア)** のみである．【1 点】
この方程式は $y' + y = x$ と書けるので，

$$\boldsymbol{P(x) = 1, \quad Q(x) = x}$$

の場合の線形微分方程式である．【3 点】

4 **選択肢 A** の中から，同次形微分方程式を選び，

(1) $\boldsymbol{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$ の形にしなさい（関数 $f(t)$ を求めなさい）．

同次形は **(カ)** のみである．【1 点】
この方程式は $xy\,y' = 2x^2 + y^2$ と書ける．両辺を xy で割ると，

$$y' = 2\cdot\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \qquad (\text{カ}')$$

となる．$\boldsymbol{f(t) = \frac{2}{t} + t}$ とおけば，$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ と書ける．【3 点】

(2) $u = \frac{y}{x}$ とおいて，u と x の変数分離形に変換しなさい．

$u = \frac{y}{x}$ とおくと，$y' = (xu)' = u + x\,u'$ となる．これらを (**カ**$'$) に代入すると

$$\begin{aligned} u + x\,u' = \frac{2}{u} + u &\iff xu' = \frac{2}{u} \\ &\iff \boldsymbol{u\,du = \frac{2}{x}\,dx} \qquad (\text{カ}'') \end{aligned}$$

となる．【3 点】

5 **選択肢 A** の中から，変数分離形でも線形でもないベルヌーイの微分方程式を選び，

(1) $\boldsymbol{y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n}$ の形にしなさい（関数 $P(x), Q(x)$ および数 n を求めなさい）．

問題の条件を満たすベルヌーイの微分方程式は **(エ)** のみである．【1 点】
この方程式は $y' + \frac{1}{x}y = x^2y^3$ と書けるので

$$\boldsymbol{P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = x^2, \quad n = 3}$$

の場合のベルヌーイの微分方程式である．【3 点】

(2) $u = y^{1-n}$ とおいて，u に関する線形微分方程式に変換しなさい．

この方程式は $n=3$ の場合のベルヌーイの微分方程式なので,$u = y^{1-3} = \frac{1}{y^2}$ とおくと，$u' = -\frac{2}{y^3}y'$，すなわち $y' = -\frac{y^3}{2}u'$ となる．これを **(エ)** に代入すると，

$$\begin{aligned} -\frac{y^3}{2}u' + \frac{1}{x}y = x^2y^3 &\iff u' - \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y^2} = -2x^2 \\ &\iff \boldsymbol{u' - \frac{2}{x}u = -2x^2} \qquad (\text{エ}') \end{aligned}$$

となり，これは線形微分方程式である．【3 点】

$\boxed{6}$ **選択肢 A** の中から, 完全微分方程式を選び, 完全微分方程式であることを示しなさい.

完全微分方程式は **(オ)** のみである.【1 点】
$P(x,y)=2x+3y,\ Q(x,y)=3x+1$ とおくと, **(オ)** は

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

と書ける. このとき,

$$P_y(x,y)=3=Q_x(x,y)$$

であるから, **(オ)** は完全微分方程式である.【3 点】

$\boxed{7}$ **選択肢 A** の中で, $\boxed{2}$〜$\boxed{5}$ で選択されていない微分方程式について, 次の各問に答えなさい.

(1) 完全微分方程式でないことを示しなさい.

$\boxed{2}$〜$\boxed{5}$で選択されていないのは **(イ)** の微分方程式である.
$P(x,y)=2y+3y^2,\ Q(x,y)=x+3xy=x(1+3y)$ とおくと, **(イ)** は

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

と書ける. このとき,

$$P_y(x,y)=2+6y\neq 1+3y=Q_x(x,y)$$

であるから, **(イ)** は完全微分方程式ではない.【3 点】

(2) $\lambda=x$ が積分因子であることを示しなさい.

(イ) の両辺に x をかけると

$$x(2y+3y^2)\,dx+x^2(1+3y)\,dy=0 \qquad (\text{イ}')$$

となる. $\bar{P}(x,y)=x(2y+3y^2),\ \bar{Q}(x,y)=x^2(1+3y)$ とおくと, (**イ**$'$) は

$$\bar{P}(x,y)\,dx+\bar{Q}(x,y)\,dy=0$$

と書くことができ, さらに

$$\bar{P}_y(x,y)=x(2+6y)=2x(1+3y)=\bar{Q}_x(x,y)$$

であるから, (**イ**$'$) は完全である. このことから, $\lambda=x$ が **(イ)** の積分因子であることがわかる.

$\boxed{8}$ **選択肢 A** の中から微分方程式を 2 つ選び, 初期条件 $(x,y)=(1,2)$ を満たす特殊解を求めなさい.

(ア) $P(x)=1,\ Q(x)=x$ の場合の線形微分方程式なので,

$$\begin{aligned}
\int P(x)\,dx&=\int dx=x,\\
\int e^{\int P\,dx}Q(x)\,dx&=\int e^x x\,dx=\int (e^x)'x\,dx\\
&=e^x x-\int e^x(x)'\,dx\\
&=x\,e^x-\int e^x\,dx\\
&=e^x x-e^x=e^x(x-1).
\end{aligned}$$

よって, 一般解は

$$y=e^{-x}\left\{e^x(x-1)+c\right\}=x-1+ce^{-x}$$

である. 初期条件より

$$2=1-1+ce^{-1} \qquad \therefore c=2e$$

なので, 求める特殊解は, $\boldsymbol{y=x-1+2e^{1-x}}$.

(イ) この方程式は完全微分方程式ではないが, $\boxed{6}$ (2) より, 積分因子 $\lambda=x$ を両辺にかけた方程式 (**イ**$'$) は完全である. よって, 一般解の公式より,

$$\begin{aligned}
&\int_0^x P(t,y)\,dt+\int_0^y Q(0,t)\,dt=c\\
\iff&\int_0^x t(2y+3y^2)\,dt+\int_0^y 0\cdot(1+3t)\,dt=c\\
\iff&(2y+3y^2)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=c\\
\iff&(2y+3y^2)\cdot\frac{x^2}{2}=c\\
\iff&(2y+3y^2)x^2=C \qquad (C=2c).
\end{aligned}$$

初期条件より,

$$(2\cdot 2+3\cdot 2^2)\cdot 1^2=C \qquad \therefore C=16$$

なので, 求める特殊解は, $\boldsymbol{(2y+3y^2)x^2=16}$.

(ウ) $\boxed{2}$ で求めた (ウ$'$) の両辺を積分すると,

$$-\frac{1}{y}=-\frac{1}{2x^2}+c$$

となる（これが一般解）. 初期条件より,

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+c \qquad \therefore c=0$$

なので, 求める特殊解は, $\boldsymbol{y=2x^2}$.

(エ) $\boxed{5}$ (2) の変換で得られた (**エ**$'$) の方程式は, $P(x) = -\dfrac{2}{x}$, $Q(x) = -2x^2$ の場合の線形微分方程式であるから,

$$\int P(x)\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx = -2\log x = \log x^{-2},$$

$$\begin{aligned}\int e^{\int P\,dx} Q(x)\,dx &= \int e^{\log x^{-2}} \cdot (-2x^2)\,dx \\ &= \int x^{-2} \cdot (-2x^2)\,dx \\ &= -2\int dx = -2x.\end{aligned}$$

よって, (**エ**$'$) の一般解は

$$u = e^{-\log x^{-2}}\left(-2x + c\right) = x^2\left(-2x + c\right)$$

である. $u = \dfrac{1}{y^2}$ より, **(エ)** の一般解は

$$1 = x^2y^2(c - 2x).$$

初期条件より

$$1 = 2^2(c-2) \qquad \therefore c = \frac{9}{4}$$

なので, 求める特殊解は, $\boldsymbol{4 = x^2y^2(9 - 8x)}$.

(オ) この方程式は完全微分方程式なので, 一般解の公式より,

$$\begin{aligned} &\int_0^x P(t, y)\,dt + \int_0^y Q(0, t)\,dt = c \\ \iff &\int_0^x (2t + 3y)\,dt + \int_0^y (3 \cdot 0 + 1)\,dt = c \\ \iff &\left[t^2 + 3yt\right]_0^x + [t]_0^y = c \\ \iff &x^2 + 3xy + y = c.\end{aligned}$$

初期条件より

$$1 + 3 \cdot 2 + 2 = c \qquad \therefore c = 9$$

なので, 求める特殊解は, $\boldsymbol{x^2 + 3xy + y = 9}$.

(カ) $\boxed{4}$ (2) で求めた変数分離形方程式 (**カ**$''$) の一般解は

$$\frac{1}{2}u^2 = 2\log x + c$$

であるから, $u = \dfrac{y}{x}$ を代入することにより, **(カ)** の一般解 $y^2 = x^2(\log x^4 + C)$ を得る（$C = 2c$）. 初期条件より

$$2^2 = (\log 1 + C) \qquad \therefore C = 4$$

なので, 求める特殊解は $\boldsymbol{y^2 = x^2(\log x^4 + 4)}$.