科 目 名 応用数学 II-J 出 題 者 名 佐藤 弘康

1 次の微分方程式の中から, 2 階定数係数線形微分方程式をすべて選びなさい.

（ア） $y''' - 2y'' + 8y = x^2 - 1$← 3 階微分方程式

（イ） $y'' + 5xy' - 6y = \cos 2x$←線形だが定数係数でない

（ウ） $y'' - 3y' - y = 0$

（エ） $y'' + 7y' - 6y = e^x \sin x$

（解答欄） （ウ） （エ） 【5 点】

2 次の定数係数線形同次微分方程式の一般解を求めなさい.

【各 5 点】

(1) $y'' + 6y' + 9y = 0$

補助方程式は

$$t^2 + 6t + 9 = (t+3)^2 = 0$$

となり, これは $t = -3$（重解）をもつので, 一般解は

$$\boldsymbol{y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}}$$

である.

(2) $y'' + 7y' + 12y = 0$

補助方程式は

$$t^2 + 7t + 12 = (t+3)(t+4) = 0$$

となり, これは異なる 2 つの実数解 $t = -3, -4$ をもつので, 一般解は

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x}}$$

である.

(3) $y'' + 2y' + 4y = 0$

補助方程式は

$$t^2 + 2t + 4 = 0$$

となり, これは実数解を持たず, 解は $t = -1 \pm \sqrt{3}i$ である. よって, 一般解は

$$\boldsymbol{y = e^{-x}(c_1 \sin \sqrt{3}x + c_2 \cos \sqrt{3}x)}$$

である.

3 次を求めなさい. 【各 5 点】

(1) $\dfrac{1}{D^2 - 2D - 3} e^{3x}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2-2D-3}e^{3x} &= \frac{1}{(D-3)(D+1)}e^{3x} = \frac{1}{D-3}\cdot\frac{1}{D+1}e^{3x} \\
&= \frac{1}{D-3}\cdot\frac{1}{3+1}e^{3x} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{D-3}e^{3x} \\
&= \frac{1}{4}e^{3x}\int e^{-3x}e^{3x}\,dx = \frac{1}{4}e^{3x}\int dx = \boldsymbol{\frac{1}{4}x\,e^{3x}}.
\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D^2-2D-3}e^{3x} &= \frac{1}{D+1}\cdot\frac{1}{D-3}e^{3x} = \frac{1}{D+1}\cdot e^{3x}\int e^{-3x}e^{3x}\,dx \\
&= \frac{1}{D+1}\cdot e^{3x}\int dx = \frac{1}{D-(-1)}\cdot e^{3x}x \\
&= e^{-x}\int e^x e^{3x} x\,dx = e^{-x}\int e^{4x}x\,dx \\
&= \frac{1}{4}e^{-x}\int (e^{4x})' x\,dx = \frac{1}{4}e^{-x}\left(e^{4x}x - \int e^{4x}dx\right) \\
&= \frac{1}{4}e^{-x}\left(e^{4x}x - \frac{1}{4}e^{4x}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{16}e^{3x}(4x-1)}
\end{aligned}$$

でもよい.

(2) $\dfrac{1}{D-2}(x^2 - 2x + 2)$

逆演算子の展開

$$\frac{1}{1-aD} = 1 + aD + a^2D^2 + \cdots + a^nD^n + \cdots$$

を利用する.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D-2} &= -\frac{1}{2-D} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}D} \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}D + \frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{8}D^3 + \cdots\right)
\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{D-2}(x^2-2x+2) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}D + \frac{1}{4}D^2 + \cdots\right)(x^2-2x+2) \\
&= -\frac{1}{2}\left\{(x^2-2x+2) + \frac{1}{2}(x^2-2x+2)' \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{4}(x^2-2x+2)'' + 0 + \cdots\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{(x^2-2x+2) + \frac{1}{2}(2x-2) + \frac{1}{4}\cdot 2\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{3}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 3)}.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ 定数係数線形微分方程式

$$y'' - 4y' + 4y = 2x^2 - 2 \qquad (*)$$

の一般解を求めなさい．なお，$(*)$ の特殊解が

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (a, b, c \text{ は定数})$$

となることを利用してもよい．

まず，$(*)$ の右辺を 0 とした同次方程式

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

の一般解を求める．補助方程式は $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$ で，この解は $t = 2$（重解）なので，一般解は

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

である．【5 点】

次に，$(*)$ の特殊解を求める．特殊解は，$y = ax^2 + bx + c$ と書けるので，

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y' = 2ax + b, \quad y'' = 2a$$

を $(*)$ に代入すると，

$$\begin{aligned} &2a - 4(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 2 \\ \Longleftrightarrow\ &4ax^2 + (-8a + 4b)x + (2a - 4b + 4c) = 2x^2 - 2 \\ \therefore &\begin{cases} 4a = 2 \\ -8a + 4b = 0 \\ 2a - 4b + 4c = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

を得る．この連立方程式を解くと，$a = \dfrac{1}{2}, b = 1, c = \dfrac{1}{4}$ となる．よって，$(*)$ の特殊解（のひとつ）は

$$y = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{4}$$

である．なお，逆演算子の計算（演算子の展開）によって，特殊解を求めることもできるが詳細は省略する（逆演算子の展開については，$\boxed{3}$ (2) の解答を参照）．【5 点】

以上のことから，$(*)$ の一般解は

$$\boldsymbol{y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{4}}$$

となることがわかる．【5 点】

$\boxed{\text{部分点について}}$ 定数係数同次微分方程式の一般解を求める設問については，(i) 補助方程式をつくって解を求めることと，(ii) その解の特性によって一般解の形（3 パターン）が決まることを理解していると認められれば，4 点加点する．

その他の問題についても，部分点として 2 点加点することがある．

$\boxed{5}$ 定数係数線形微分方程式

$$y'' + 2y' + 3y = 4\cos x \qquad (\sharp)$$

の一般解を求めなさい．なお，$(\sharp)$ の特殊解が

$$y = a\sin x + b\cos x, \quad (a, b \text{ は定数})$$

となることを利用してもよい．

まず，$(\sharp)$ の右辺を 0 とした同次方程式

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

の一般解を求める．補助方程式は $t^2 + 2t + 3 = 0$ で，この解は $t = -1 \pm \sqrt{2}\,i$（ただし，i は虚数単位）なので，一般解は

$$y = e^{-x}(c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x)$$

である．【5 点】

次に，$(\sharp)$ の特殊解を求める．特殊解は，$y = a\sin x + b\cos x$ と書けるので，

$$y = a\sin x + b\cos x, \quad y' = a\cos x - b\sin x, \quad y'' = -a\sin x - b\cos x$$

を $(\sharp)$ に代入すると，

$$\begin{aligned} &(-a\sin x - b\cos x) + 2(a\cos x - b\sin x) \\ &\qquad\qquad + 3(a\sin x + b\cos x) = 4\cos x \\ \Longleftrightarrow\ &(2a - 2b)\sin x + (2a + 2b)\cos x = 4\cos x \\ \therefore &\begin{cases} 2a - 2b = 0 \\ 2a + 2b = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

を得る．この連立方程式を解くと，$a = b = 1$ となる．よって，$(\sharp)$ の特殊解（のひとつ）は

$$y = \sin x + \cos x$$

である．なお，逆演算子の計算により，以下のようにして特殊解を求めることもできる．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{D^2 + 2D + 3}(4\cos x + 4i\ \sin x) = \frac{1}{D^2 + 2D + 3}(4e^{ix}) \\ =&\frac{4}{i^2 + 2i + 3}e^{ix} = \frac{4}{2(1+i)}(\cos x + i\ \sin x) \\ =&(1 - i)(\cos x + i\ \sin x) = (\cos x + \sin x) + i(\sin x - \cos x). \end{aligned}$$

よって，

$$\frac{1}{D^2 + 2D + 3}(4\cos x) = \cos x + \sin x$$

を得る．【5 点】

以上のことから，$(\sharp)$ の一般解は

$$\boldsymbol{y = e^{-x}(c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x) + \sin x + \cos x}$$

である．【5 点】