1　ベクトル $\boldsymbol{a}=(x,2,-1), \boldsymbol{b}=(-2,-4,y)$ に対し，次の問に答えなさい．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行になるような x, y を求めなさい．

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行となるのは，$\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ となるとき，つまり

$$(x,2,-1)=k(-2,-4,y)=(-2k,-4k,ky) \quad 【4点】$$

となるときである．各成分を比較すると，

$$x=-2k, \quad 2=-4k, \quad -1=ky$$

である．第 2 式より，$k=-\frac{1}{2}$．よって，第 1 式より $x=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{1}$，第 3 式より $y=-\frac{1}{k}=\mathbf{2}$ であることがわかる．【4 点】

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するような x, y の組を 1 つ挙げなさい．

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するのは，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$，すなわち，

$$-2x-8-y=0 \quad 【4点】$$

が成り立つときである．これを満たす x, y の組は無数にある．例えば，$x=-3, y=-2$ など．【4 点】

2　$\boldsymbol{a}=(2,0,1,-1)$ と $\boldsymbol{b}=(1,2,0,-2)$ に対し，

(1) 大きさ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$

(2) 内積 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

(3) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$

の値を求めなさい．

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+0^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6} \quad 【3点】$$
$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+2^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3 \quad 【3点】$$
$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=2\times1+0\times2+1\times0+(-1)\times(-2)=4 \quad 【3点】$$
$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{3\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{9} \quad 【3点】$$

3　$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ から，グラムシュミットの方法によって，正規直交系を作りなさい．

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{a}_1=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}. \quad 【5点】$$

$$\boldsymbol{u}_2'=\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$$
$$=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad 【3点】,$$

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{u}_2'|}\boldsymbol{u}_2'=\underline{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}. \quad 【2点】$$

$$\boldsymbol{u}_3'=\boldsymbol{a}_3-(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1-(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$$
$$=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}, \quad 【3点】$$

$$\boldsymbol{u}_3=\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}. \quad 【2点】$$

4　ベクトルの 1 次独立性に関する以下の文を読んで，空欄に当てはまる最も適切な言葉，数または式を解答欄に書きなさい．

ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ に対し，

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+c_k\boldsymbol{a}_k=\mathbf{0}$$

を満たすスカラー $c_1,c_2,\ldots,c_k$ が「すべて $\boxed{(1)}$」の場合しかないとき，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ は 1 次独立であるという．例えば，$\boldsymbol{a}_1=(1,2), \boldsymbol{a}_2=(2,-1)$ は 1 次 $\boxed{(2)}$ である．また，$\boldsymbol{b}_1=(2,-3), \boldsymbol{b}_2=(-\frac{2}{3},1)$ は $\boldsymbol{b}_2=\boxed{(3)}\,\boldsymbol{b}_1$ を満たすので，1 次 $\boxed{(4)}$ である．

(解答欄)

(1)		(2)	
(3)		(4)	

(1) **0**　(2) **独立**　(3) $-\boldsymbol{\frac{1}{3}}$　(4) **従属**　【各 3 点】

$\boxed{5}$ 集合 $W=\{(a,1,b)\in R^3 \mid a,b\in R\}$ が R^3 の部分空間であるか否か判定しなさい.

部分空間ではない.　【5 点】
$\boldsymbol{x}_1=(a_1,1,b_1)$, $\boldsymbol{x}_2=(a_2,1,b_2)$ に対し，$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=(a_1+a_2,2,b_1+b_2)$ となり，第 2 成分が 1 でないので，$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ は W のベクトルではない.　【5 点】

$\boxed{6}$ $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，$f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} 3x-2y \\ -4x+6y \end{pmatrix}$ を対応させる写像 $f:R^2\longrightarrow R^2$ が線形写像なら表現行列を求めなさい．線形写像でないなら，その理由を述べなさい.

線形写像である.　【5 点】
表現行列は $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.　【5 点】

$\boxed{7}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ の固有値を求めなさい．また，各固有値に対する固有空間を求めなさい.

固有多項式は

$$f_A(t)=\begin{vmatrix} 3-t & 2 \\ -4 & -6-t \end{vmatrix}=t^2+3t-10=(t+5)(t-2).$$

よって，固有値は -5 と 2 である.　【2 点】
固有値 -5 に対する固有ベクトルは $k\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ 【2 点】,
固有値 2 に対する固有ベクトルは $l\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 【2 点】
である（k,l は 0 でない実数）．したがって，固有空間はそれぞれ,

$$\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right\rangle,\left\langle\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

である（各【2 点】）.

$\boxed{8}$ 2 次形式 $2x^2+2xy+2y^2$ の標準形を求めなさい.

$$2x^2+2xy+2y^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ 【2 点】

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおいて，これを直交行列で対角化する.

$$f_A(t)=\begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix}=t^2-4t+3=(t-1)(t-3).$$

よって，固有値は 3, 1 である.【2 点】
固有ベクトルはそれぞれ $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $l\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.【各 2 点】
したがって，それぞれ正規化した固有ベクトルを並べて行列 $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ をつくると，P は直交行列で，${}^tPAP=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.【2 点】
ここで，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=P\boldsymbol{X}$ とおくと【2 点】,

$$\begin{aligned}2x^2+2xy+2y^2 &={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t(P\boldsymbol{X})AP\boldsymbol{X}={}^t\boldsymbol{X}({}^tPAP)\boldsymbol{X} \\ &=\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &=3X^2+Y^2.\end{aligned}$$

【3 点】