1 次の行列式を求めなさい．【各 1 点】

(1) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 11 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -11 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$

$= -11 \times ((-12) - 7) = -11 \times (-19) = \mathbf{209}$　【1 点】

(2) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

$= - \begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & -5 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$　【1 点】

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 12 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

$= 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix}$

$= 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times (-3 - 28)$

$= = 5 \times (-31) = \mathbf{-155}$　【2 点】

2 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & c & 1 \\ b & 1 & * \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列が $A^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & \frac{3}{2} & * \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix}$ であるとする．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) 小行列式 $|A_{22}|$ の値を求めなさい．ただし，A_{ij} は A から第 i 行と第 j 行を取り除いた 2×2 行列である．

$A_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ より，$|A_{22}| = -1 - 2 = \mathbf{-3}$.【1 点】

(2) 行列式 $|A|$ の値は -2 である．その理由を述べなさい．

余因子行列の性質より，$A\widetilde{A} = |A|E$ であるから，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

が成り立つ【1 点】．よって，仮定より

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{|A|} \times (-3).$$

よって，$|A| = -2$ である.【1 点】

(3) a の値を求めなさい．

余因子行列と逆行列の関係より

$$|A_{13}| = ab - 2 = (-2) \times 1 = -2 \qquad \therefore ab = 0 \qquad (1)$$
$$|A_{33}| = -1 - bc = (-2) \times 1 = -2 \qquad \therefore bc = 1 \qquad (2)$$

となる【1 点】．(1) 式より，$a = 0$ または $b = 0$ である．しかし (2) 式より，$b \neq 0$ であることがわかる．よって，$\boldsymbol{a = 0}$ である【1 点】．

学籍番号	1						学科	
氏名								

3 平面上の点 P の座標を $(3,2)$ とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 点 P を原点を中心に 45° 回転させた点の座標を求めなさい．

45° 回転の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である【1 点】．よって，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}}. \qquad 【1\text{ 点}】$$

(2) 点 Q を原点を中心に 60° 回転させた点が P であるとする．このとき，点 Q の座標を求めなさい．

点 Q は P を -60° 回転させた点である．-60° 回転の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -(-\sqrt{3}) \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

である【1 点】．よって，

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+2\sqrt{3} \\ 2-3\sqrt{3} \end{pmatrix}}. \qquad 【1\text{ 点}】$$

4 1 次変換 f によって，点 $(-2,-1)$ は点 $(1,4)$ に移り，点 $(5,8)$ は点 $(2,3)$ に移るとする．このとき，f の行列を求めなさい．

求めるものは

$$A\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たす行列 A である【1 点】．上の 2 つの式は

$$A\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

と同値である．$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 35 & -26 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{10}{11} & \frac{9}{11} \\ -\frac{35}{11} & \frac{26}{11} \end{pmatrix} \qquad 【1\text{ 点}】 \end{aligned}$$

5 平面内の直線 $y = 2x - 4$ を ℓ とする．次の各行列が定める 1 次変換によって，ℓ がどのような図形に移るか答えなさい．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

直線 $y = 2x - 4$ 上の点は $(t, 2t-4)$ と表される【1 点】．よって，この点を行列 A が定める線形変換で変換すると，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t+12 \\ 4t-4 \end{pmatrix},$$

つまり，

$$\begin{aligned} X &= -4t+12 \\ Y &= 4t-4 \end{aligned}$$

である【1 点】．この 2 式から t を消去すると，$X + Y = 8$ を得る．つまり，直線 $y = 2x - 4$ はこの変換によって，直線 $\boldsymbol{y = -x + 8}$ に移る【1 点】．

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(1) と同様に考えると

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

となる【1 点】．よって，直線は **1 点 $(4, -2)$** に移る【1 点】．

学籍番号	1						学科	
氏名								