1 次の行列式を求めなさい．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= -14$ 【4 点】

(2) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

$= 140$ 【$4+4$ 点】

2 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & * \\ * & * & 3 \\ 2 & -1 & * \end{pmatrix}$ の逆行列が $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & * & 1 \\ 0 & * & -2 \\ * & 1 & * \end{pmatrix}$ であるとする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 小行列式 $|A_{23}|$ の値を求めなさい．ただし，A_{ij} は A から第 i 行と第 j 列を取り除いた 2×2 行列である．

$$|A_{23}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{1} \quad 【4 点】$$

(2) 行列式 $|A|$ の値は -2 である．その理由を述べなさい．

$-|A_{23}|$ は A の余因子行列 $\widetilde{A}$ の $(3,2)$ 成分でるから，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$ より，

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{|A|}(-1).$$

よって，$|A| = -2$ である． 【4 点】

3 点 $\mathrm{P}(-3, 2)$ について以下の問に答えなさい．

(1) 点 P を，原点を中心に時計の針と反対周りに 45° 回転させた点の座標を求めなさい．

45° 回転変換の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 【4 点】$$

である．よって

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad 【4 点】$$

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が表す 1 次変換 f によって，点 Q は点 P に移るとする．このとき，点 Q の座標を求めなさい．

点 Q の座標を (X, Y) とおくと，仮定から

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 【4 点】$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2-2\times(-3)}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

よって，Q の座標は $\left(\dfrac{3}{8}, \dfrac{5}{4}\right)$． 【4 点】

4 $A=\begin{pmatrix}1&8\\1&3\end{pmatrix}$ について次の問に答えなさい．

(1) A の固有値を求めなさい．

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&8\\1&3-\lambda\end{vmatrix}$$ 【5 点】

$$=\lambda^2-4\lambda-5$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-5)$$

よって，A の固有値は $\underline{-1 \text{ と } 5}$. 【5 点】

(2) 各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい．

$\lambda=-1$ のとき，

$$A-(-1)E=\begin{pmatrix}2&8\\1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4\\0&0\end{pmatrix}$$

よって，固有値 -4 に対する固有ベクトルは $k\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

$\lambda=5$ のとき，

$$A-5E=\begin{pmatrix}-4&8\\1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix}$$

よって，固有値 5 に対する固有ベクトルは $k\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

（ただし，k は 0 でない任意の実数）． 【各 5 点】

(3) 行列 A が定める 1 次変換によって自分自身に移る直線 $y=mx$ をすべて求めなさい．

原点を通り，行列 A の固有ベクトルと平行な直線は，A によって不変である．よって，

$$y=-\frac{1}{4}x,\quad y=\frac{1}{2}x$$

の 2 つ存在する．【各 5 点】

5 $A=\begin{pmatrix}-1&4\\4&5\end{pmatrix}$ について次の問に答えなさい．

(1) A の固有値を求めなさい．

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&4\\4&5-\lambda\end{vmatrix}$$ 【5 点】

$$=\lambda^2-4\lambda-21$$

$$=(\lambda+3)(\lambda-7)$$

よって，A の固有値は $\underline{-3 \text{ と } 7}$. 【5 点】

(2) ${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めなさい．

$\lambda=-3$ のとき，

$$A-(-3)E=\begin{pmatrix}2&4\\4&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},$$

$\lambda=7$ のとき，

$$A-7E=\begin{pmatrix}-8&4\\4&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

であるから，各固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルとしてそれぞれ $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$，$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を選び【各 5 点】，

$P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$ とおけば，${}^tPAP=\begin{pmatrix}-3&0\\0&7\end{pmatrix}$ と対角化できる．【5 点】

(3) (1)(2) の結果を利用して，2 次形式

$$F=-x^2+8xy+5y^2$$

を $F=\alpha X^2+\beta Y^2$ と標準化しなさい．また，そのときの x,y と X,Y の関係式を答えなさい．

(2) の結果から，

$$F=\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}-3&0\\0&7\end{pmatrix}{}^tP\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$ 【5 点】

よって，

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}={}^tP\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

とおけば，$F=-3X^2+7Y^2$ と標準化される． 【5 点】

6 次の 3 つの条件をすべて満たす 2 次正方行列 A を求めなさい．ただし，f は行列 A が定める 1 次変換とする．

(i) 行列式 $|A|$ の値は -6 である．

(ii) f によって，直線 $y=2x$ はそれ自身に移る．

(iii) ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，A の固有値 2 に対する固有ベクトルである．

条件 (ii) より，ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は A の固有ベクトルであることがわかる．つまり，

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となる λ が存在する．また，条件 (iii) より，

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．以上のことから，

$$A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} \lambda & 6 \\ 2\lambda & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} \lambda-12 & -3\lambda+6 \\ 2\lambda-4 & -6\lambda+2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と書ける．条件 (i) より，

$$\begin{aligned}
-6 = |A| &= \frac{1}{25}\left\{(\lambda-12)(-6\lambda+2)-(-3\lambda+6)(2\lambda-4)\right\} \\
&= \frac{1}{25}\left\{-2(\lambda-12)(3\lambda-1)+6(\lambda-2)^2\right\} \\
&= \frac{1}{25}\left\{-2(3\lambda^2-37\lambda+12)+6(\lambda^2-4\lambda+4)\right\} \\
&= \frac{50}{25}\lambda = 2\lambda.
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lambda = -3.$$

よって，$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

【15 点（部分点なし）】

日本工業大学