

1 次の行列式を求めなさい。【各1点】

$$(1) \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 11 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -11 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \\ = -11 \times ((-12) - 7) = -11 \times (-19) = \mathbf{209} \quad \text{【1点】}$$

$$(2) \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -5 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & -5 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{【1点】}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 12 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times (-3 - 28)$$

$$= 5 \times (-31) = \mathbf{-155} \quad \text{【2点】}$$

2 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & c & 1 \\ b & 1 & * \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列が $A^{-1} =$

$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & \frac{3}{2} & * \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix}$ であるとする。このとき、以下の間に答えなさい。

(1) 小行列式 $|A_{22}|$ の値を求めなさい。ただし、 A_{ij} は A から第 i 行と第 j 行を取り除いた 2×2 行列である。

$$A_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ より, } |A_{22}| = -1 - 2 = \mathbf{-3.} \text{【1点】}$$

(2) 行列式 $|A|$ の値は -2 である。その理由を述べなさい。

余因子行列の性質より、 $A\tilde{A} = |A|E$ であるから、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

が成り立つ【1点】。よって、仮定より

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{|A|} \times (-3).$$

よって、 $|A| = -2$ である。【1点】

(3) a の値を求めなさい。

余因子行列と逆行列の関係より

$$|A_{13}| = ab - 2 = (-2) \times 1 = -2 \quad \therefore ab = 0 \quad (1)$$

$$|A_{33}| = -1 - bc = (-2) \times 1 = -2 \quad \therefore bc = 1 \quad (2)$$

となる【1点】。(1)式より、 $a = 0$ または $b = 0$ である。しかし(2)式より、 $b \neq 0$ であることがわかる。よって、 $a = 0$ である【1点】。

学 部 名	1								学 科
	氏 名								

3 平面上の点 P の座標を (3, 2) とする. このとき, 次の問に答えなさい.

(1) 点 P を原点を中心に 45° 回転させた点の座標を求めなさい.

45° 回転の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である【1点】. よって,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad \text{【1点】}$$

(2) 点 Q を原点を中心に 60° 回転させた点が P であるとする. このとき, 点 Q の座標を求めなさい.

点 Q は P を -60° 回転させた点である. -60° 回転の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -(-\sqrt{3}) \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

である【1点】. よって,

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{3} \\ 2-3\sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad \text{【1点】}$$

4 1次変換 f によって, 点 $(-2, -1)$ は点 $(1, 4)$ に移り, 点 $(5, 8)$ は点 $(2, 3)$ に移るとする. このとき, f の行列を求めなさい.

求めるものは

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たす行列 A である【1点】. 上の2つの式は

$$A \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

と同値である. $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ であるから,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 35 & -26 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{10}{11} & \frac{9}{11} \\ -\frac{35}{11} & \frac{26}{11} \end{pmatrix} \quad \text{【1点】} \end{aligned}$$

5 平面内の直線 $y = 2x - 4$ を l とする. 次の各行列が定める1次変換によって, l がどのような図形に移るか答えなさい.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

直線 $y = 2x - 4$ 上の点は $(t, 2t - 4)$ と表される【1点】. よって, この点を行列 A が定める線形変換で変換すると,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t + 12 \\ 4t - 4 \end{pmatrix},$$

つまり,

$$X = -4t + 12$$

$$Y = 4t - 4$$

である【1点】. この2式から t を消去すると, $X + Y = 8$ を得る. つまり, 直線 $y = 2x - 4$ はこの変換によって, 直線 $y = -x + 8$ に移る【1点】.

$$(2) B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) と同様に考えると

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

となる【1点】. よって, 直線は1点 $(4, -2)$ に移る【1点】.

学籍番号	1						学科	
氏名								