1 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (x^2+5x-6)\,dx$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-6x+C \qquad 【5 点】$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx$

$$=\int x^{-3}\,dx$$
$$=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C$$
$$=-\frac{1}{2x^2}+C \qquad 【5 点】$$

(3) $\displaystyle\int (2-3x)^7\,dx$

$$=\frac{1}{7+1}(2-3x)^{7+1}\times\left(-\frac{1}{3}\right)+C$$
$$=-\frac{1}{24}(2-3x)^8+C \qquad 【5 点】$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-3}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\log|2x-3|+C \qquad 【5 点】$$

(5) $\displaystyle\int e^{3x}\,dx$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}+C \qquad 【5 点】$$

(6) $\displaystyle\int \cos 5x\,dx$

$$=\frac{1}{5}\sin 5x+C \qquad 【5 点】$$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+5x-3}\,dx$

$$=\int \frac{1}{(2x-1)(x+3)}\,dx$$
$$=\frac{1}{7}\int\left(\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx \qquad 【5 点】$$
$$=\frac{1}{7}\left(\log|2x-1|-\log|x+3|\right)+C$$
$$=\frac{1}{7}\log\left|\frac{2x-1}{x+3}\right|+C \qquad 【5 点】$$

(8) $\displaystyle\int e^{2x}\cos x\,dx$

$I=\displaystyle\int e^{2x}\cos x\,dx$ とおく．

$$I=\int e^{2x}(\sin x)'\,dx$$
$$=e^{2x}\sin x-\int (e^{2x})'\sin x\,dx$$
$$=e^{2x}\sin x-2\int e^{2x}\sin x\,dx \qquad 【5 点】$$
$$=e^{2x}\sin x-2\int e^{2x}(-\cos x)'\,dx$$
$$=e^{2x}\sin x-2\left\{e^{2x}(-\cos x)-\int (e^{2x})'(-\cos x)\,dx\right\}$$
$$=e^{2x}\sin x-2\left(-e^{2x}\cos x+2\int e^{2x}\cos x\,dx\right)$$
$$=e^{2x}\sin x+2e^{x}\cos x-4I.$$

よって，$I=\dfrac{e^{2x}}{5}(e^{2x}\sin x+2e^{2x}\cos x).$ 　【5 点】

2 置換積分または部分積分を用いて次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_2^{\sqrt{6}} x\sqrt{x^2-2}\,dx$

$x^2-2=t$ とおくと，$2x\,dx=dt$ である．また，$x=2$ のとき $t=2$，$x=\sqrt{6}$ のとき $t=4$ であるから，

$$\begin{aligned}\int_2^{\sqrt{6}} x\sqrt{x^2-2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_2^4 \sqrt{t}\,dt \qquad \text{【5 点】}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_2^4\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}\right]_2^4\\ &= \frac{1}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right)\\ &= \frac{8-2\sqrt{2}}{3} \qquad \text{【5 点】}\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

$x=2\sin t$ とおくと，$dx=2\cos t\,dt$ である．また，積分区間 $-2\leqq x\leqq 2$ は $-\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ となるので，

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\,\cos t\,dt \qquad \text{【5 点】}\\ &= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt\\ &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t+1)\,dt\\ &= 2\left[\frac{1}{2}\sin 2t+t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 2\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\ &= 2\pi \qquad \text{【5 点】}\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{3x}\,dx$

$$\begin{aligned}&= \int_0^1 x\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'\,dx\\ &= \left[x\times\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 (x)'\times\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)\,dx \qquad \text{【5 点】}\\ &= \frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}\,dx\\ &= \frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3}e^3-\frac{1}{9}(e^3-1)\\ &= \frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9} \qquad \text{【5 点】}\end{aligned}$$

3 次の広義積分が存在するならば，その値を求め，存在しない場合はその理由を述べよ．

(1) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{3-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx \qquad \text{【5 点】}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-2\sqrt{3-x}\right]_0^{3-\varepsilon}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{\varepsilon}+2\sqrt{3}\right)\\ &= 2\sqrt{3} \qquad \text{【5 点】}\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

$$\begin{aligned}&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{【5 点】}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\log|x|\right]_\varepsilon^1\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}(-\log\varepsilon)\end{aligned}$$

極限 $\lim_{\varepsilon\to 0}\log\varepsilon$ は，負の無限大に発散するので，この異常積分の値は存在しない． 【5 点】

(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$

$$\begin{aligned}&= \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^3}\,dx \qquad \text{【5 点】}\\ &= \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^M\\ &= \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{2M^2}+\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2} \qquad \text{【5 点】}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $y = x^2\sqrt{4-x^2}$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい．

この関数は $4-x^2 \geqq 0$，すなわち $-2 \leqq x \leqq 2$ で定義されていることに注意する．

$$x^2\sqrt{4-x^2} = 0 \iff x^2\sqrt{(2-x)(2+x)} = 0$$

より，この曲線は x 軸と $x = -2,\ 0,\ 2$ で交わる．$-2 \leqq x \leqq 2$ で $y \geqq 0$ であるから，求める面積の値 S は

$$S = \int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

である．$x = 2\sin t$ と変数変換すると，$dx = 2\cos t\,dt$ かつ，積分区間は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となるので，

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt \\
&=8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ \cos^2 t\,dt \\
&=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t\cos t)^2\,dt \\
&=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt \\
&=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt \\
&= \left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&=\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\pi}. \qquad \text{【15 点】}
\end{aligned}$$

- $\boxed{1}$〜$\boxed{3}$ の点数は 85 点を上限とする．
- $\boxed{4}$ については，基本的には部分点はないが，$\boxed{1}$〜$\boxed{3}$ の点数との合計が 85 点を超えない範囲で部分点を加点することがある．