$\boxed{1}$ 変数分離形微分方程式

$$y' = 4xy$$

について以下の問に答えなさい．

(1) 一般解を求めなさい．

方程式は

$$\frac{dy}{dx} = 4xy \iff \frac{1}{y}dy = 4x\,dx$$

と変形できるので，これは変数分離形である．両辺をそれぞれ積分すると

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 4x\,dx$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\log y = 2x^2 + c}$$

を得る（$\boldsymbol{y = C\,e^{2x^2}}$ でもよい）.【1 点】

(2) 初期条件 $x = 0, y = 1$ を満たす特殊解を求めなさい．

(1) で求めた一般解に，初期条件を代入すると

$$\log 1 = 0 + c$$

より，$c = 0$ である．よって，この特殊解は

$$\therefore\quad \boldsymbol{\log y = 2x^2}$$

である（$\boldsymbol{y = e^{2x^2}}$ でもよい）.【1 点】

$\boxed{2}$ 微分方程式

$$xy\,dy - (2x^2 + y^2)\,dx = 0$$

について次の問に答えなさい．

(1) 同次形であることを示しなさい．

この微分方程式は

$$xy\,y' = 2x^2 + y^2$$

と書ける．両辺を xy で割れば，$y' = 2\cdot\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ となる．$f(t) = \dfrac{2}{t} + t$ とおけば，上の方程式は $y' = f(y/x)$ と書けるの．よって，同次形である.【1 点】

(2) 適当に変数変換すると，変数分離形微分方程式

$$zz' = \frac{2}{x}$$

になることを示しなさい．

$z = \dfrac{y}{x}$ とおくと，$y' = (xz)' = z + x\,z'$ である．
これらを微分方程式に代入すると

$$z + x\,z' = \frac{2}{z} + z \iff xz' = \frac{2}{z}$$
$$\iff zz' = \frac{2}{x}$$

となる.【1 点】

学籍番号	1						学科	
氏名								

3 微分方程式

$$y' - y + xy^2 = 0 \qquad (*)$$

について次の問に答えなさい.

(1) この方程式を適当に変数変換することにより，線形微分方程式

$$z' + z = x$$

になることを示しなさい.

この方程式は $n = 2$ の場合のベルヌーイの微分方程式である. $z = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$ とおくと，$z' = -\dfrac{1}{y^2}y'$ である.【1 点】
$y' = -y^2 z'$ を代入すると，

$$\begin{aligned} -y^2 z' - y = -xy^2 &\iff z' + \frac{1}{y} = x \\ &\iff z' + z = x \end{aligned}$$

となる.【1 点】

(2) (1) の線形微分方程式の一般解を求めなさい.

$P(x) = 1,\ Q(x) = x$ より，

$$\int P(x)\,dx = \int dx = x.$$

$$\begin{aligned} \int e^{\int P\,dx} Q(x)\,dx = \int e^x x\,dx = \int (e^x)' x\,dx \\ = x\,e^x - \int e^x (x)'\,dx \\ = x\,e^x - \int e^x\,dx \\ = x\,e^x - e^x. \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{z = e^{-x}(x\,e^x - e^x + c)}$.【1 点】

(3) $(*)$ の一般解を求めなさい.

$z = \frac{1}{y}$ より，

$$\frac{1}{y} = e^{-x}(x\,e^x - e^x + c)$$

または，

$$e^x = y\,(x\,e^x - e^x + c)\,. \qquad \text{【1 点】}$$

4 微分方程式

$$(3x^2 - 2y)\,dx + (3y^2 - 2x)\,dy = 0$$

が完全であることを確かめ，一般解を求めなさい.

$P(x,y) = 3x^2 - 2y,\ Q(x,y) = 3y^2 - 2x$ とおくと，

$$P_y = -2 = Q_x$$

が成り立つので，この微分方程式は完全である.【1 点】
よって，解は

$$\begin{aligned} &\int_0^x P(t,y)\,dt + \int_0^y Q(0,t)\,dt = c \\ \iff &\int_0^x (3t^2 - 2y)\,dt + \int_0^y (3t^2 - 2\times 0)\,dt = c \\ \iff &\left[t^3 - 2yt\right]_0^x + \left[t^3\right]_0^y = c \\ \iff &\boldsymbol{x^3 - 2xy + y^3 = c} \quad \text{【1 点】} \end{aligned}$$

学籍番号	1							学科		
氏名										