1 微分方程式

$$xyy' - (x^2 + y^2) = 0 \qquad (*)$$

について次の問に答えなさい.

(1) 微分方程式 $(*)$ は $y' = f(z),\ z = \dfrac{y}{x}$ と表すことができる. この関数 $f(t)$ を求めなさい.

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{z} + z.$$

よって, $\boldsymbol{f(t) = \dfrac{1}{t} + t}$. 【5 点】
（このことから, $(*)$ が同次形であることがわかる）

(2) 適当な変数変換により, $(*)$ は変数分離形

$$xzz' = 1 \qquad (**)$$

に変換されることを示しなさい.

$z = \dfrac{y}{x}$ とおくと, $y' = (xz)' = z + x\,z'$ である.
これらを (1) の式に代入すると

$$\begin{aligned} y' = \frac{1}{z} + z &\iff z + x\,z' = \frac{1}{z} + z \\ &\iff x\,z' = \frac{1}{z} \\ &\iff xzz' - 1 = 0. \quad 【5 点】 \end{aligned}$$

(3) 変数分離形微分方程式 $(**)$ の一般解を求めなさい.

$$\begin{aligned} xzz' = 1 &\iff xz\frac{dz}{dx} = 1 \\ &\iff z\,dz = \frac{1}{x}dx. \end{aligned}$$

この式の両辺を積分すると

$$\int z\,dz = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\therefore \quad \frac{z^2}{2} = \log x + c \quad 【5 点】$$

(4) $(*)$ の一般解を答えなさい.

(3) の結果に, $z = \frac{y}{x}$ を代入することにより

$$\boldsymbol{\frac{y^2}{x^2} = 2\log x + C}$$

を得る. 【5 点】

2 微分方程式

$$(x^2 + 3xy)\,dx + (3x^2 - xy)\,dy = 0 \qquad (\dagger)$$

について, 次に問に答えなさい.

(1) $(\dagger)$ が完全でないことを示しなさい.

$P(x,y) = x^2 + 3xy,\ Q(x,y) = 3x^2 - xy$ とおくと, $(\dagger)$ は

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

と書ける. このとき,

$$P_y = 3x \neq 6x - y = Q_x$$

であるから, $(\dagger)$ は完全ではない. 【5 点】

(2) $g = \dfrac{1}{x}$ が $(\dagger)$ の積分因子であることを示しなさい.

$(\dagger)$ の両辺に $\dfrac{1}{x}$ をかけると

$$(x + 3y)\,dx + (3x - y)\,dy = 0$$

となる. $\bar{P}(x,y) = \dfrac{P}{x} = x + 3y,\ \bar{Q}(x,y) = \dfrac{Q}{x} = 3x - y$ とおくと

$$\bar{P}_y = 3 = \bar{Q}_x$$

となり, $\bar{P}\,dx + \bar{Q}\,dy = 0$ は完全微分方程式になる. よって, $\dfrac{1}{x}$ が積分因子であることがわかる. 【5 点】

(3) $(\dagger)$ の一般解を求めなさい.

$\bar{P}\,dx + \bar{Q}\,dy = 0$ の一般解を求める.

$$\begin{aligned} c &= \int_0^x \bar{P}(t,y)\,dt + \int_0^y \bar{Q}(0,t)\,dt \\ &= \int_0^x (t + 3y)\,dt + \int_0^y (3\cdot 0 - t)\,dt \quad 【5 点】 \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 + 3yt\right]_0^x - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^y \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 3xy - \frac{1}{2}y^2. \end{aligned}$$

よって, 一般解は

$$\boldsymbol{x^2 + 6xy - y^2 = C}$$

である. 【5 点】

3 次の定数係数線形同次微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $y'' - 2y' - 8y = 0$

補助方程式は

$$0 = t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2)$$

となり，この解は異なる 2 つの実数解 $t = -2, 4$ なので，一般解は

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x}}. \quad 【6 点】$$

(2) $y'' - 8y' + 16y = 0$

補助方程式は

$$0 = t^2 - 8t + 16 = (t-4)^2$$

となり，この解は重解 $t = 4$ なので，一般解は

$$\boldsymbol{y = (c_1 + c_2 x)e^{4x}}. \quad 【6 点】$$

(3) $y'' + 2y' + 5y = 0$

補助方程式は

$$t^2 + 2t + 5 = 0$$

となり，これは実数解を持たず，解は $t = -1 \pm 2i$ である．よって，一般解は

$$\boldsymbol{y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)}. \quad 【6 点】$$

4 $\dfrac{1}{D^2 - 2D - 3} e^{3x}$ を求めなさい．

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(D-3)(D+1)} e^{3x} \\
&= \frac{1}{D-3} \cdot \frac{1}{D+1} e^{3x} \\
&= \frac{1}{D-3} \cdot \frac{1}{3+1} e^{3x} \quad 【6 点】\\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{D-3} e^{3x} \\
&= \frac{1}{4} e^{3x} \int e^{-3x} e^{3x}\, dx \quad 【6 点】\\
&= \frac{1}{4} e^{3x} \int dx \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{4} x\, e^{3x}} \quad 【6 点】
\end{aligned}$$

5 定数係数線形微分方程式

$$y'' - 6y' + 9y = 2x - 3$$

の一般解を求めなさい．

まず，定数係数線形同次微分方程式

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

の一般解を求める．補助方程式は

$$0 = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$$

となり，重解 $t = 3$ をもつので，一般解は

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$$

である． 【6 点】
次に

$$y'' - 6y' + 9y = 2x - 3$$

の特殊解を逆演算子の計算により求める．この微分方程式は

$$(D^2 - 6D + 9)y = 2x - 3$$

と書けるので，特殊解は

$$\frac{1}{D^2 - 6D + 9}(2x - 3)$$

によって求めることができる．これを演算子の展開の方法を用いて計算する．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{D^2 - 6D + 9}(2x-3) \\
&= \frac{1}{(D-3)^2}(2x-3) \\
&= \frac{1}{(-3)^2} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{D}{3}}\right)^2 (2x-3) \\
&= \frac{1}{9} \cdot \left\{1 + \frac{D}{3} + \left(\frac{D}{3}\right)^2 + \cdots\right\}^2 (2x-3) \\
&= \frac{1}{9} \cdot \left\{1 + \frac{D}{3} + \left(\frac{D}{3}\right)^2 + \cdots\right\} \left(2x - 3 + \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{9} \cdot \left\{1 + \frac{D}{3} + \left(\frac{D}{3}\right)^2 + \cdots\right\} \left(2x - \frac{7}{3}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(2x - \frac{7}{3} + \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(2x - \frac{5}{3}\right) \\
&= \frac{1}{27}(6x - 5). \qquad 【6 点】
\end{aligned}$$

よって，求める一般解は

$$\boldsymbol{\frac{1}{27}(6x - 5) + (c_1 + c_2 x)}e^{3x}$$

である【6 点】．

$\boxed{\mathbf{6}}$ ある定数係数線形微分方程式の一般解が

$$y = c_1 e^{3x}\cos x + c_2 e^{3x}\sin x + 2x\cos x + e^{2x} + x^2$$

であるとする（ただし，c_1, c_2 は任意定数）．この微分方程式を求めなさい．

一般解の任意定数を含む項が

$$c_1 e^{3x}\cos x + c_2 e^{3x}\sin x$$

であるから，これは補助方程式の解が虚数解 $t = 3 \pm i$ であることを意味している．

$$\{t-(3+i)\}\{t-(3-i)\} = t^2 - 6t + 10$$

より，求める微分方程式は

$$(D^2 - 6D + 10)y = Q(x)$$

と書けることがわかる．この微分方程式の特殊解 が

$$2x\cos x + e^{2x} + x^2$$

であるから，

$$\begin{aligned}
Q(x) =&(D^2-6D+10)(2x\cos x + e^{2x} + x^2)\\
=&(2x\cos x + e^{2x} + x^2)'' - 6(2x\cos x + e^{2x} + x^2)'\\
&+10(2x\cos x + e^{2x} + x^2)\\
=&(2\cos x - 2x\sin x + 2e^{2x} + 2x)'\\
&-6(2\cos x - 2x\sin x + 2e^{2x} + 2x)\\
&+10(2x\cos x + e^{2x} + x^2)\\
=&(-2\sin x - 2\sin x - 2x\cos x + 4e^{2x} + 2)\\
&-6(2\cos x - 2x\sin x + 2e^{2x} + 2x)\\
&+10(2x\cos x + e^{2x} + x^2)\\
=&4(3x-1)\sin x + 6(3x-2)\cos x\\
&+2e^{2x} + 2(5x-1)(x-1).
\end{aligned}$$

よって，求める微分方程式は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y'' - 6y' + 10} =&\boldsymbol{4(3x-1)\sin x + 6(3x-2)\cos x}\\
&\boldsymbol{+ 2e^{2x} + 2(5x-1)(x-1)}.
\end{aligned}$$

【15 点】

- $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$ の点数は 85 点を上限とする．
- $\boxed{6}$ については，基本的には部分点はないが，$\boxed{1}$〜$\boxed{5}$ の点数との合計が 85 点を超えない範囲で部分点を加点することがある．