科目名 解析基礎 解析演習　　出題者名 佐藤 弘康

1 次の問に答えなさい．

(1) 105° を弧度法で表しなさい．

$$105 \times \frac{\pi}{180} = \mathbf{\frac{7\pi}{12}}$$　【5 点】

(2) 2016° は第何象限の角か答えなさい．

$$180 < 2016 - 360 \times 5 = 216 < 270$$

よって，**第 3 象限**　【5 点】

(3) $\sin\theta < 0, \tan\theta > 0$ をみたす θ は第何象限の角か答えなさい．

第 3 象限　【5 点】

(4) $\cos\frac{25\pi}{6}$ の値を求めなさい．

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \times 2\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{6}$$ （【3 点】）

$$= \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$　【5 点】

(5) $\sin\frac{7\pi}{12}$ の値を求めなさい．

$$= \sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ\ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ\ \sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \mathbf{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$　【5 点】

2 θ は $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$，$\sin\theta = \frac{1}{3}$ を満たす．このとき，次の問に答えなさい．

(1) $\cos\theta$ の符号（正か負か）を答えなさい．

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき，$\cos\theta$ は**負**である．　【5 点】

(2) $\cos\theta$ の値を求めなさい．

(1) の結果と

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

より，

$$\cos\theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = \mathbf{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$　【5 点】

（正の値の場合は部分点【3 点】）

(3) $\cos\frac{\theta}{2}$ の符号（正か負か）を答えなさい．

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ より，$\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ なので，$\cos\frac{\theta}{2}$ は**正**である．
【5 点】

(4) $\cos\frac{\theta}{2}$ の値を求めなさい．

半角の公式より，

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(\cos\theta + 1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 1\right) = \frac{3-2\sqrt{2}}{6}.$$

$\cos\frac{\theta}{2} > 0$ より，$\cos\frac{\theta}{2} = \mathbf{\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}}$. 【5 点】

（半角の公式を書いていれば部分点【3 点】）

3 角 θ を $\tan\theta = -\frac{1}{4}$ を満たす第 2 象限の角とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) $\cos\theta$ の符号（正か負か）を答えなさい．

θ が第 2 象限の角のとき，$\cos\theta$ は**負**である.【5 点】

(2) $\cos\theta$ の値を求めなさい．

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

より，

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

であるから，(1) の結果より

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 1}} = -\sqrt{\frac{16}{17}} = \mathbf{-\frac{4}{\sqrt{17}}}.$$　【5 点】

（正の値の場合は部分点【3 点】）

4 半径 5 の円の弧の長さが 2π であるとき，この弧の中心角を求めなさい．

$5\times\theta=2\pi$．よって，$\theta=\boldsymbol{\frac{2\pi}{5}}$ である．【5 点】

5 $\triangle$ABC において，CA$=3$，AB$=5$，$A=60^\circ$ のとき，BC を求めなさい．

余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= 3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos 60^\circ\\ &= 9+25-30\cdot\frac{1}{2}\\ &= 19\end{aligned}$$

よって，BC$=\boldsymbol{\sqrt{19}}$．　【5 点】

（余弦定理を書いていれば部分点【3 点】）

6 各辺の長さが BC$=5$，CA$=6$，AB$=7$ である $\triangle$ABC に対して，次の問に答えなさい．

(1) $\cos C$ の値を求めなさい．

余弦定理より，

$$\begin{aligned}49=7^2 &= 5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cdot\cos C\\ &= 25+36-60\cdot\cos C\\ \therefore\ \cos C &= \frac{12}{60}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}.\end{aligned}$$
【5 点】

(2) $\triangle$ABC の外接円の半径を求めなさい．

三角比の性質と，$0<C<180^\circ$ より，

$$0<\sin C=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

よって，正弦定理より，外接円の半径は

$$R=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{AB}}{\sin C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{\frac{2\sqrt{6}}{5}}=\boldsymbol{\frac{35}{4\sqrt{6}}}$$
【5 点】

(正弦定理を書いていれば部分点【3 点】)

7 関数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ について次の各問に答えなさい．

(1) 三角関数の合成によって，$f(x)=A\sin(x+\alpha)$ の形にしたときの A と α の値を求めなさい．

$$f(x)=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}\sin(x+\alpha)=2\sin(x+\alpha).$$

よって，$\boldsymbol{A=2}$．α は

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sin\alpha=-\frac{1}{2}$$

を満たす数なので，$\boldsymbol{\alpha=-\frac{\pi}{6}}$ である．【5 点】

（どちらか一方のみ正答の場合は部分点【3 点】）

(2) $f(x)$ の最小値と最大値を求めなさい．

$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ より，最大値は 2，最小値は -2．【5 点】

(3) $f(x)=0$ を満たす x を 1 つ答えなさい．

求めるものは，$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ を満たす x である．$\sin 0=0$ より，例えば $x=\frac{\pi}{6}$．　【5 点】

(4) 関数 $f(x)$ の周期を答えなさい．

2π　【5 点】

(5) $y=f(x)$ のグラフを描きなさい．

(1)〜(4) の結果から，グラフは周期が 2π，振幅が $-2\leqq y\leqq 2$ の正弦波で，x 軸とは $x=\frac{\pi}{6}$ で交わるグラフである（概形は省略）．　【5 点】

$\boxed{8}$ 不等式

$$3\sin x - \cos 2x \leqq 1$$

を満たす x の範囲を求めなさい．ただし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．

$$\begin{aligned} 3\sin x - \cos 2x \leqq 1 &\iff 3\sin x - (1 - 2\sin^2 x) - 1 \leqq 0 \\ &\iff 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 \leqq 0 \\ &\iff (2\sin x - 1)(\sin x + 2) \leqq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore\ -2 \leqq \sin x \leqq \frac{1}{2}$$

しかし，$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より，

$$-1 \leqq \sin x \leqq \frac{1}{2}$$

を満たす x の範囲を求めればよい．よって，

$$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6} \leqq x \leqq 2\pi}$$

である．【15 点】

- $\boxed{1}$〜$\boxed{7}$ の点数は 85 点を上限とする．
- $\boxed{8}$ については，基本的には部分点はないが，$\boxed{1}$〜$\boxed{7}$ の点数との合計が 85 点を超えない範囲で部分点を加点することがある．