科目名　応用数学 I-J　　出題者名　佐藤 弘康

1 2変数関数の連続性に関する以下の文を読んで，(1)(2)(3) に当てはまるもっとも適当なものを下の選択肢から選び，丸で囲みなさい．

関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \text{ のとき}\\ 0 & (x,y)=(0,0) \text{ のとき}\end{cases}$$

の原点 $(0,0)$ における連続性を考える．つまり，極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ の値が $\boxed{(1)}$ に等しいか否かを調べる．そのために，点 $\mathrm{P}(x,y)$ の座標を，P から原点までの距離 r と，線分 OP と x 軸との角 θ によって表す極表示を用いると

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\boxed{}=\boxed{(2)}$$

となり，この値は θ によって変化することがわかる．ゆえに，この極限は存在しない．

よって，この関数は原点では連続で $\boxed{(3)}$ ．

(選択肢)

(1)　-1 ・ 0 ・ 1 ・ ∞

(2)　$\sin^2\theta$ ・ $\sin 2\theta$ ・ $\cos^2\theta$ ・ $\cos 2\theta$

(3)　ある ・ ない

(1) 0　(2) $\cos 2\theta$　(3) ない　【各 2 点】

2 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数を求めなさい．

(1) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

$$f_x(x,y)=\frac{2y}{(x+y)^2}$$
$$f_y(x,y)=-\frac{2x}{(x+y)^2}$$

2 つとも正解なら【3 点】．
どちらか一方だけ正解なら【1 点】．

(2) $f(x,y)=\sin(xy)$

$$f_x(x,y)=y\cos(xy)$$
$$f_y(x,y)=x\cos(xy)$$

2 つとも正解なら【3 点】．
どちらか一方だけ正解なら【1 点】．

3 関数 $f(x,y)=y\,e^{xy}$ の 2 次偏導関数を求めなさい．

$$f_x(x,y)=y^2\,e^{xy}$$
$$f_y(x,y)=e^{xy}+xy\,e^{xy}=(1+xy)e^{xy}$$

2 つとも正解なら【3 点】．
どちらか一方だけ正解なら【1 点】．

$$f_{xx}(x,y)=y^3\,e^{xy}$$
$$f_{xy}(x,y)=2y\,e^{xy}+xy^2\,e^{xy}=(2+xy)ye^{xy}$$
$$f_{yy}(x,y)=2x\,e^{xy}+x^2y\,e^{xy}=x(2+xy)e^{xy}$$

3 つとも正解なら【4 点】．
$n(<3)$ 個正解なら【n 点】．

4 以下は $2.01^3\times 1.98^4$ の近似値を計算する方法について述べた文章である．空欄に当てはまる最も適切な式または数を解答欄に書きなさい．

$f(x,y)=x^3y^4$ とおくと，

$$2.01^3\times 1.98^4=f(2+\boxed{(1)},2+\boxed{(2)})$$

である．さて，$z=f(x,y)$ の全微分は

$$dz=\boxed{\quad(3)\quad}$$

であり，これは独立変数 x,y の増分が dx,dy のときの z の増分を表している．$x=y=2$, $dx=\boxed{(1)}$, $dy=\boxed{(2)}$ とおけば，

$$dz=\boxed{(4)}$$

となるので，次の近似値

$$2.01^3\times 1.98^4=\boxed{(5)}+\boxed{(4)}$$

が得られる．

(解答欄)

(1) $\boxed{}$　(2) $\boxed{}$

(3)　($z=x^3y^4$ の全微分)

$\boxed{}$

(4) $\boxed{}$　(5) $\boxed{}$

(1) 0.01　(2) -0.02　(3) $dz=3x^2y^4\,dx+4x^3y^3\,dy$
(4) -3.2　(5) $2^3\times 2^4$
((3) は【2 点】，他は【各 1 点】)

5 $x^2+2xy-y^2=-8$ の陰関数を $y=f(x)$ とする．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

$F(x,y)=x^2+2xy-y^2+8$ とおく【1 点】と，

$$F_x = 2x+2y = 2(x+y), \qquad \text{【1 点】}$$
$$F_y = 2x-2y = 2(x-y) \qquad \text{【1 点】}$$

である．$y=f(x)$ は $F(x,y)=)$ の陰関数なので，

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \qquad \text{【1 点】}$$
$$= -\frac{2(x+y)}{2(x-y)} = \underline{-\frac{x+y}{x-y}}. \qquad \text{【1 点】}$$

(2) $f'(a)=0$ を満たす $x=a$ と，そのときの y の値の組をすべて求めなさい．

$f(a)=b$ とする．つまり

$$F(a,b)=a^2+2ab-b^2+8=0 \qquad (1)$$

が成り立つ【1 点】．$f'(a)=0$ ならば，(1) の結果より，

$$f'(a)=-\frac{a+b}{a-b}=0, \quad \text{つまり}, \quad a+b=0 \qquad (2)$$

が成り立つ【1 点】．(2) 式より，$b=-a$ を (1) 式に代入すると

$$2a\times(-a)+8=0, \qquad \therefore\ a=\pm 2$$

を得る．ゆえに解は $(a,b)=(2,-2)$, $(-2,2)$ である【3 点】．

(3) $f'(a)=0$ を満たす $x=a$ に対し，$f''(a)$ の値を求めなさい．ただし，$F(x,y)=0$ の陰関数の 2 階導関数が

$$y''=-\frac{F_{xx}+2F_{xy}\,y'+F_{yy}(y')^2}{F_y}$$

となることを用いてよい．

$f(a)=b$ かつ $f'(a)=0$ ならば，

$$f''(a)=-\frac{F_{xx}(a,b)}{F_y(a,b)}$$

が成り立つ．

$$F_{xx}(x,y)=2 \qquad \text{【1 点】}$$

より，

$$f''(x)=-\frac{2}{2(x-y)}=-\frac{1}{x-y}$$

よって，$f''(2)=-\frac{1}{4}$，$f''(-2)=\frac{1}{4}$ である【各 2 点】．

6 関数

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3-3xy+\frac{1}{3}y^3+4$$

の極値をすべて求めなさい．

f の偏導関数は

$$f_x = x^2-3y = x^2-3y, \qquad \text{【1 点】}$$
$$f_y = -3x+y^2 = y^2-3x \qquad \text{【1 点】}$$

である．連立方程式 $f_x=f_y=0$，すなわち

$$\begin{cases} x^2-3y=0 \\ y^2-3x=0 \end{cases}$$

の解は $(x,y)=(0,0)$ と $(3,3)$ である【1 点】．なぜなら，連立方程式の 1 つ目の式を $y=\frac{x^2}{3}$ と変形し，これを 2 つ目の式に代入すると

$$\frac{x^4}{9}-3x=0 \iff \frac{x}{9}(x^3-27)=0$$
$$\iff \frac{x}{9}(x-3)(x^2+3x+9)=0$$
$$\therefore x=0,3$$

これらの点で極値をとるか否か判定する．f の 2 次偏導関数は

$$(A=)\ f_{xx} = 2x \qquad \text{【1 点】}$$
$$(B=)\ f_{xy} = -3 \qquad \text{【1 点】}$$
$$(C=)\ f_{yy} = 2y \qquad \text{【1 点】}$$

である．

(i) $(x,y)=(0,0)$ のとき，

$$AC-B^2=0\times 0-(-3)^2=-9<0$$

であるから，この点で<u>極値はとらない</u>【1 点】．

(ii) $(x,y)=(3,3)$ のとき，

$$AC-B^2=6\times 6-(-3)^2=27>0$$

なので，この点で極値をとる【1 点】．$A=6>0$ より，この点で極小値をとり【1 点】，その値は

$$f(3,3)=9-27+9+4=\underline{-5} \quad \text{【1 点】}$$

である．