科 目 名 応用数学 I-J　　出 題 者 名 佐藤 弘康

1 次の累次積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (3-x-y)\,dy\,dx$

$$=\int_0^2\int_0^1 (3-x-y)\,dy\,dx$$
$$=\int_0^2\left[(3-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}dx$$
$$=\int_0^2\left\{(3-x)-\frac{1}{2}\right\}dx \quad 【2点】$$
$$=\int_0^2\left(\frac{5}{2}-x\right)dx$$
$$=\left[\frac{5}{2}x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$
$$=5-2$$
$$=\mathbf{3} \quad 【3点】$$

(2) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x x\,y^2\,dy\,dx$

$$=\int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{x^4}{3}dx \quad 【2点】$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$
$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}} \quad 【3点】$$

2 次の 2 重積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\iint_D (2x-y)\,dxdy \quad D: 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2$

$$=\int_1^2\int_0^1 (2x-y)\,dx\,dy \quad 【3点】$$
$$=\int_1^2 \left[x^2-xy\right]_{x=0}^{x=1}dy$$
$$=\int_1^2 (1-y)\,dy \quad 【2点】$$
$$=\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_1^2$$
$$=\left(2-\frac{4}{2}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \quad 【2点】$$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)e^x\,dxdy \quad D: -y\le x\le 0,\ 0\le y\le 1$

$$=\int_0^1\int_{-y}^0 (x+y)e^x\,dx\,dy \quad 【3点】$$
$$=\int_0^1\int_{-y}^0 (x+y)\,(e^x)'\,dx\,dy$$
$$=\int_0^1\left\{\left[(x+y)e^x\right]_{x=-y}^{x=0}-\int_{-y}^0 (x+y)'e^x\,dx\right\}dy \quad 【2点】$$
$$=\int_0^1\left\{y-\int_{-y}^0 e^x\,dx\right\}dy$$
$$=\int_0^1\left\{y-\left[e^x\right]_{x=-y}^{x=0}\right\}dy$$
$$=\int_0^1\left(y-1+e^{-y}\right)dy$$
$$=\left[\frac{y^2}{2}-y-e^{-y}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}-1-e^{-1}-(-1)$$
$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}} \quad 【2点】$$

3 次の累次積分の積分順序を変更しなさい．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx \quad 【6点】$$

(積分領域の図が正しく描かれていれば，部分点【2点】)

(2) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$

$$= \int_{-1}^0 \int_0^{y+1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_0^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy \quad 【6点】$$

(積分領域の図が正しく描かれていれば,【2点】)
(2つの積分領域のうち一方のみ記述の場合は,【2点】)

4 次の不等式で表される空間の領域 V の体積を求めなさい．

(1) $V: 0 \leqq x \leqq 2,\quad 0 \leqq y \leqq 1,\quad 0 \leqq z \leqq x^2$

$$\int_0^2 \int_0^1 x^2\,dy\,dx \quad 【3点】$$
$$= \int_0^2 \left[x^2 y\right]_{y=0}^{y=1} dx$$
$$= \int_0^2 x^2(1-0)\,dx$$
$$= \int_0^2 x^2\,dx \quad 【2点】$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 dx$$
$$= \frac{1}{3}(2^3 - 0^3)$$
$$= \mathbf{\frac{8}{3}} \quad 【2点】$$

(2) $V: 0 \leqq x \leqq y^2,\quad 0 \leqq y \leqq 1,\quad 0 \leqq z \leqq 3 - x - y$

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} (3-x-y)\,dx\,dy \quad 【3点】$$
$$= \int_0^1 \left[(3-y)x - \frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=y^2} dy$$
$$= \int_0^1 \left\{(3-y)y^2 - \frac{1}{2}y^4\right\} dy$$
$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}y^4 - y^3 + 3y^2\right) dy \quad 【2点】$$
$$= \left[-\frac{1}{10}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + y^3\right]_0^1$$
$$= -\frac{1}{10} - \frac{1}{4} + 1$$
$$= \frac{-2-5+20}{20}$$
$$= \mathbf{\frac{13}{20}} \quad 【2点】$$