科目名 数学 II-J　　出題者名 佐藤 弘康

1 次の文章中の空欄 (1) 〜 (12) に入る適切な言葉を（ア）〜（チ）の中から選びなさい．また，空欄 (a)〜(c) に入る適切な式を書きなさい．

- 1 回の試行で，ある事象 A が起こる確率を p とすると，n 回独立に試行したとき，A が k 回起こる回数を確率変数 X にとったときの確率分布を二項分布といい，$B(n,p)$ で表す．$B(n,p)$ の期待値は $\boxed{\text{(a)}}$ で，分散は $\boxed{\text{(b)}}$ である．
- X が二項分布 $B(n,p)$ に従うとき，n が十分大きければ，X は近似的に $\boxed{(1)}$ 分布に従う．これを $\boxed{(2)}$ 定理とよぶ．
- $X_1, X_2, \ldots X_n$ を互いに独立で，同じ確率分布に従う確率変数とする．このとき，n が十分大きければ，

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

  は近似的に $\boxed{(1)}$ 分布に従う．これを $\boxed{(3)}$ 定理という．
- 確率変数 X の平均値を μ，標準偏差を σ とするとき，任意の $\lambda > 1$ に対し，

$$P(|X-\mu| \geqq \lambda\sigma) \leqq \frac{1}{\lambda^2}$$

  が成り立つ．これを $\boxed{(4)}$ 定理という．また，余事象の確率を考えることにより，上の不等式は

$$P(|X-\mu| < \lambda\sigma) > \boxed{\text{(c)}}$$

  と同値である．
- 調査対象である集団（集合）Π と，Π の各要素の特性 X の組 (Π, X) を $\boxed{(5)}$ という．この X は確率変数として確率分布する．この確率分布を $\boxed{(6)}$ といい，X の期待値を $\boxed{(7)}$，分散を $\boxed{(8)}$ という．
- Π が有限か，または要素の数が少なければ，すべての要素について X を調べることは容易であろう．これを $\boxed{(9)}$ という．一方，Π が非常に大きな集団であったり，無限である場合は $\boxed{(9)}$ は不可能である．Π から選ばれた n 個の要素の X の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ から (Π, X) 全体の情報を得る（推定する）ことを，$\boxed{(10)}$ という．
- $\boxed{(10)}$ における $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ のことを大きさ n の $\boxed{(11)}$ といい，$\boxed{(11)}$ をとり出すことを $\boxed{(12)}$ という．

（解答欄）

(1)〜(12) に入る最も適切な言葉を（ア）〜（チ）の中から選びなさい．

(1)		(2)	
(3)		(4)	
(5)		(6)	
(7)		(8)	
(9)		(10)	
(11)		(12)	

（ア）正規　（イ）ポアソン　（ウ）チェビシェフの
（エ）ラプラスの　（オ）中心極限
（カ）標本調査　（キ）全数調査　（ク）国勢調査
（ケ）標本　（コ）標本抽出　（サ）母平均
（シ）母分散　（ス）不偏分散　（セ）標本分散
（ソ）母集団　（タ）数標識　（チ）母集団分布

(a)〜(c) に入る適切な式を書きなさい．

(a)

(b)

(c)

(1) （ア）　(2) （エ）　(3) （オ）　(4) （ウ）
(5) （ソ）　(6) （チ）　(7) （サ）　(8) （シ）
(9) （キ）　(10) （カ）　(11) （ケ）　(12) （コ）

(a) np　(b) $np(1-p)$　(c) $1 - \dfrac{1}{\lambda^2}$

以上【各 2 点】

2 次の確率の値を,「1」「0.5」「+」「−」「$\Phi(z)$（ただし, z は具体的な数値とすること）」を用いて表しなさい．ただし, Z は標準正規分布に従う確率変数とし, X は期待値 $\mu = 140$, 分散 $\sigma^2 = 25$ の正規分布に従う確率変数とする．また, $\Phi(z) = P(0 \leq Z \leq z)$ である．

例） $P(1.57 \leqq Z) = 0.5 - \Phi(1.57)$

(1) $P(-0.97 \leqq Z \leqq 0)$

$$= P(0 \leqq Z \leqq 0.97)$$
$$= \mathbf{\Phi(0.97)}.$$ 【5 点】

(2) $P(0.51 \leqq Z \leqq 2.22)$

$$= P(0 \leqq Z \leqq 2.22) - P(0 \leqq Z < 0.51)$$
$$= \mathbf{\Phi(2.22) - \Phi(0.51)}.$$ 【5 点】

(3) $P(137.4 \leqq X \leqq 152.3)$

$$= P\left(\frac{137.4-140}{5} \leqq \frac{X-140}{5} \leqq \frac{152.3-140}{5}\right)$$
$$= P\left(-\frac{2.6}{5} \leqq Z \leqq \frac{12.3}{5}\right)$$
$$= P\left(-0.52 \leqq Z \leqq 2.46\right)$$
$$= P\left(-0.52 \leqq Z \leqq 0\right) + P\left(0 \leqq Z \leqq 2.46\right)$$
$$= \mathbf{\Phi(0.52) + \Phi(2.46)}.$$ 【5 点】

(4) $P(X \leqq 131.1)$

$$= P\left(\frac{X-140}{5} \leqq \frac{131.1-140}{5}\right)$$
$$= P\left(Z \leqq -\frac{8.9}{5}\right) = P\left(Z \leqq -1.78\right)$$
$$= P\left(1.78 \leqq Z\right)$$
$$= 1 - P\left(Z \leqq 1.78\right)$$
$$= 1 - \left(0.5 + P\left(0 \leqq Z \leqq 1.78\right)\right)$$
$$= 0.5 - P\left(0 \leqq Z \leqq 1.78\right)$$
$$= \mathbf{0.5 - \Phi(1.78)}.$$ 【5 点】

3 表と裏の出る確率が同じである硬貨を 4000 回投げるときに, 表が出る回数を X とする．このとき, 次の問に答えなさい．

(1) X は確率変数と考えられる．X の期待値と分散の値を答えなさい．

X は 二項分布 $B\left(4000, \frac{1}{2}\right)$ に従うので, 期待値は,

$$\mu = 4000 \times \frac{1}{2} = \mathbf{2000},$$

分散は

$$\sigma^2 = 4000 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \mathbf{1000}$$

である．【5 点】

- 片方だけ求めている場合は【2 点】
- ただし, (2) において, X が $N(2000, 1000)$ に従うとして計算している場合は【5 点】.

(2) X が近似的に正規分布に従うとして, 表が 2017 回以上でる確率を求めなさい．

$$P(2017 \leqq X) \approx P(2017 - 0.5 \leqq X)$$
$$= P\left(\frac{2017-0.5-2000}{\sqrt{1000}} \leqq \frac{X-2000}{\sqrt{1000}}\right)$$
$$= P\left(\frac{16.5}{\sqrt{1000}} \leqq Z\right)$$
$$= 0.5 - P\left(0 \leqq Z < \frac{16.5}{\sqrt{1000}}\right)$$
$$= 0.5 - \Phi\left(\frac{16.5}{\sqrt{1000}}\right)$$
$$= 0.5 - \Phi\left(0.52\right)$$
$$= 0.5 - 0.19847$$
$$= \mathbf{0.30153}.$$ 【5 点】

- 正規分布に近似して確率を求める際, ± 0.5 補正をしていない場合は 1 点減点する．

4 ある地方の小学校新入生男子の平均身長 μ を調べたい．そのため，900 人を無作為抽出したら，平均は 116.2cm であった．過去の資料から，小学校新入生男子の身長は，標準偏差 $\sigma = 4.86$cm の正規分布に従うと考えられる．平均身長 μ の信頼度 95% と 90% の信頼区間をそれぞれ求めなさい．

900 人分の平均を $\bar{x}$ とおくと，これは $N(\mu, 4.86^2/900)$ に従う確率変数のひとつの現実値である．信頼度 β の信頼区間を

$$[\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon], \qquad \bar{x} = 116.2$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\beta =& P(\bar{x}-\varepsilon \leqq \mu \leqq \bar{x}+\varepsilon)\\ =& P(-\varepsilon \leqq \bar{x}-\mu \leqq \varepsilon)\\ =& P\left(-\frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}} \leqq \frac{\bar{x}-\mu}{4.86/\sqrt{900}} \leqq \frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}}\right)\\ =& 2P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}}\right)\\ =& 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}}\right).\end{aligned}$$

信頼度 $\beta = 0.95$ のとき，

$$\begin{aligned}&\Phi\left(\frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}}\right) = \frac{0.95}{2} = 0.475\\ \iff& \frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}} = 1.96\\ \iff& \varepsilon = 1.96 \times \frac{4.86}{\sqrt{900}} = \frac{1.96 \times 4.86}{30} = 0.31752.\end{aligned}$$

よって，信頼限度は 116.2 ± 0.32 であるから，信頼区間は

$$[\mathbf{115.88, 116.52}]$$

である．【5 点】

一方，信頼度 $\beta = 0.9$ のとき，

$$\begin{aligned}&\Phi\left(\frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}}\right) = \frac{0.9}{2} = 0.45\\ \iff& \frac{\varepsilon}{4.86/\sqrt{900}} = 1.64\\ \iff& \varepsilon = 1.64 \times \frac{4.86}{\sqrt{900}} = \frac{1.64 \times 4.86}{30} = 0.26568.\end{aligned}$$

よって，信頼限度は 116.2 ± 0.27 であるから，信頼区間は

$$[\mathbf{115.93, 116.47}]$$

である．【5 点】

5 ある精密機器メーカーでは，直径の平均が $\mu = 3.32$ cm，標準偏差 $\sigma = 0.03$ cm のボルトを製造していた．ある日，10 個のボルトを任意に抽出したら，直径の平均が 3.34 cm であった．このボルトの製造機械は正常に動作しているだろうか？有意水準 1% で検定しなさい．

(1) 帰無仮説 H_0 を「直径の平均は $\mu = 3.32$cm である」とする．【2 点】

(2) 対立仮説 H_1 は「$\mu = \mu_1 \neq 3.32$cm である」とする．【2 点】
（片側検定の場合は【1 点】）

(3) 10 個の標本平均 $X = \frac{1}{10}(X_1 + \cdots + X_{10})$ を考えると，これは $N(\mu, 0.03^2/10)$ に従う．【2 点】

(4) 対立仮説の設定から，両側検定する．よって，棄却域は

$$P(|Z| > k) = 0.01 \text{ を満たす } Z \text{ の全体}$$

となる（ただし，Z は $N(0,1)$ に従う確率変数）．

$$\begin{aligned}0.01 =& P(|Z| > k) = 2P(k < Z)\\ =& 2(0.5 - P(0 \leqq Z \leqq k)) = 2(0.5 - \Phi(k))\end{aligned}$$

$$\therefore \Phi(k) = 0.5 - \frac{0.01}{2} = 0.495$$

$$\therefore k = 2.58.$$

よって，棄却域の不等式は

$$\begin{aligned}|Z| > 2.58 \iff& \left|\frac{\bar{X} - 3.32}{0.03/\sqrt{10}}\right| > 2.58\\ \iff& |\bar{X} - 3.32| > 2.58 \times \frac{0.03}{\sqrt{10}} = 0.024476\end{aligned}$$

である．つまり，棄却域 W は

$$|w - 3.32| > 0.024476$$

を満たす w の全体である．【2 点】

(5) 今，サイズ 10 の実測値が 3.34 だが，これは

$$|3.34 - 3.32| = 0.02 < 0.024476$$

より，棄却域に含まれないので，$\boldsymbol{H_0}$ **は採択される**．つまり，製造機械は正常に動作しているといってよい．【2 点】