1 次の行列式を求めなさい．

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 11 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$= -11 \times (7-(-12)) = -11 \times 19 = \mathbf{-209}$ 【1 点】

(2) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & -5 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$ 【1 点】

(3) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 12 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 14 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = -5 \times (-3-28)$$

$= -5 \times (-31) = \mathbf{155}$ 【1 点】

2 余因子行列の定義を述べなさい．

n 次正方行列 A に対し，第 i 行と第 j 列を取り除いた $(n-1)$ 次正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を乗じたものを A の余因子といい，A_{ij} で表す．(i,j) 成分が A_{ji} である行列のことを，A の余因子行列という． 【1 点】

3 平面上の点 P の座標を $(3,2)$ とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ が表す 1 次変換による点 P の像を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

よって，点 P の像は $\mathbf{(4,-8)}$ である． 【1 点】

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が表す 1 次変換による点 Q の像が P であるとする．このとき，点 Q の座標を求めなさい．

点 Q の座標を (x,y) とおくと，

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である．つまり，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2-(-6)}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

よって，$(x,y) = \left(\mathbf{\frac{9}{8}, -\frac{1}{4}}\right)$. 【1 点】

学籍番号	1						学科	
氏名								

4 1 次変換 f によって，点 $(-2,-1)$ は点 $(2,3)$ に移り，点 $(5,8)$ は点 $(1,4)$ に移るとする．このとき，f を表す行列を求めなさい．

求めるものは

$$A\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を満たす行列 A である【1 点】．上の 2 つの式は

$$A\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

と同値である．よって，

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 17 & -12 \\ 28 & -23 \end{pmatrix} \qquad \text{【1 点】} \end{aligned}$$

5 平面内の直線 $y = x - 2$ を ℓ とする．次の各行列が表す 1 次変換によって，ℓ がどのような図形に移るか答えなさい．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

直線 $y = x - 2$ 上の点は $(t, t-2)$ と表される【1 点】．よって，この点を行列 A が表す 1 次変換で変換すると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t+6 \\ 3t-2 \end{pmatrix},$$

つまり，$x' = -t+6, y' = 3t-2$ である．【1 点】
この 2 式から t を消去すると，$3x'+y' = 16$ を得る．つまり，直線 $y = x-2$ はこの 1 次変換によって，直線 $\boldsymbol{y = -3x+16}$ に移る【1 点】．

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) と同様に考えると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

となる【1 点】．よって，直線は **1 点 $(2,-2)$** に移る【1 点】．

6 次の 3 つの条件をすべて満たす 2 次正方行列 A を求めなさい．ただし，f は行列 A が表す 1 次変換とする．

(i) 点 $(1,2)$ の f による像は $(5,0)$ である．

(ii) 行列式 $|A|$ の値は -5 である．

(iii) 直線 $y = x$ は f で不変である（$y = x$ 上の点を変換しても，また $y = x$ 上の点に移る）．

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，条件 (i) より，

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix}.$$

よって，$A = \begin{pmatrix} 5-2b & b \\ -2d & d \end{pmatrix}$ と書ける．【1 点】
条件 (ii) より，

$$-5 = |A| = d(5-2b) - b \times (-2d) = 5d$$

よって，$d = -1$ となり，$A = \begin{pmatrix} 5-2b & b \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ と書ける．
【1 点】
条件 (iii) より，直線 $y = x$ 上の点 (t,t) を f で変換した点

$$\begin{pmatrix} 5-2b & b \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 5-b \\ 1 \end{pmatrix}$$

も，直線 $y = x$ 上の点なので，$5-b = 1$ となる．よって，$b = 4$ を得る．【1 点】
以上のことから，

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

となることがわかる．

学籍番号	1					学科		
氏名								