1 次の行列式を求めなさい．

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 4 \\ 8 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 12 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$= -12 \times (16-1) = -12 \times 15 = \mathbf{-180}$　　【5 点】

(2) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 11 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 7 & 8 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 8 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & 0 & -9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -5 & -9 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times (-35 - (-81))$$

$= 2 \times 46 = \mathbf{92}$　　【5 点】

2 行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ と表す．次の問に答えなさい．

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 4 \\ 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ のとき，$\widetilde{A}$ の $(2,3)$ 成分を求めなさい．

A の余因子行列の (i,j) 成分は，A から第 j 行と第 i 列を取り除いた $(n-1)$ 次正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を乗じたものである．

$A_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(20-(-2)) = \mathbf{-22}.$　　【5 点】

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ のとき，

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -1 \\ -4 & -10 & 8 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ である．逆行列 A^{-1} を求めなさい．

$A\widetilde{A} = -10I$ であるから，$A^{-1} = -\frac{1}{10}\widetilde{A}$ である．　　【5 点】

3 平面上の点 P の座標を $(2,3)$ とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ が表す 1 次変換による点 P の像を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

よって，点 P の像は $\mathbf{(1, -2)}$ である．　　【5 点】

(2) 行列 $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ が表す 1 次変換による点 Q の像が P であるとする．このとき，点 Q の座標を求めなさい．

点 Q の座標を (x,y) とおくと，

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

である．つまり，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-6-2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

よって，$(x,y) = \mathbf{\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{8}\right)}$.　　【5 点】

4 1 次変換 f によって，点 $(-2,-1)$ は点 $(5,8)$ に移り，点 $(2,3)$ は点 $(1,4)$ に移るとする．このとき，f を表す行列を求めなさい．

求めるものは

$$A\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

を満たす行列 A である．上の 2 つの式は

$$A\begin{pmatrix}-2&2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\8&4\end{pmatrix}$$

と同値である【5 点】．
よって，

$$A=\begin{pmatrix}5&1\\8&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\-1&3\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&1\\8&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\1&-2\end{pmatrix}$$
$$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}16&-12\\28&-24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3\\-7&6\end{pmatrix}\qquad【5 点】$$

5 平面内の直線 $y=x-2$ を ℓ とする．次の各 1 次変換によって，ℓ がどのような図形に移るか答えなさい．

(1) $A=\begin{pmatrix}2&-3\\2&1\end{pmatrix}$ が表す 1 次変換

直線 $y=x-2$ 上の点は $(t,t-2)$ と表される【5 点】．
よって，この点を行列 A が表す 1 次変換で変換すると，

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\t-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t+6\\3t-2\end{pmatrix},$$

つまり，$x'=-t+6, y'=3t-2$ である．
この 2 式から t を消去すると，$3x'+y'=16$ を得る．つまり，直線 $y=x-2$ はこの 1 次変換によって，直線 $\boldsymbol{y=-3x+16}$ に移る【5 点】．

(2) 原点を中心に反時計回りに 45° 回転させる変換

45° 回転変換の行列は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}.\qquad【5 点】$$

よって，

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\t-2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\2t-2\end{pmatrix},$$

つまり，$(x',y')=(\sqrt{2},\sqrt{2}(t-1))$ である．この点は t の値と無関係に，常に x 座標の値は $\sqrt{2}$ である．よって，直線 ℓ は y 軸に平行な**直線** $\boldsymbol{x=\sqrt{2}}$ に移る【5 点】．

6 次の各問に答えなさい．

(1) 正方行列の固有値と固有ベクトルの定義を述べなさい．

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$$

を満たす数 λ を固有値，ベクトル $\vec{x}$ を固有ベクトルという．
【5 点】

(2) ベクトル $\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ は行列 $\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}$ の固有ベクトルである．このベクトルに対応する固有値を求めなさい．

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

よって，固有値は **2** である．【5 点】

(3) 行列 $\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

固有方程式は

$$0=\begin{vmatrix}2-\lambda&3\\3&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5=(\lambda-5)(\lambda+1).$$

よって，固有値は $\boldsymbol{\lambda=-1,5}$．【5 点】
$\lambda=-1$ に属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

より，$c\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ である．【5 点】
$\lambda=5$ に属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}-3&3\\3&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

より，$c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ である（ただし，c は 0 でない任意の実数）．
【5 点】

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{2017}$ を求めなさい．

行列 $A = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = \pm 1$,

$\lambda = 1$ に属する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$\lambda = -1$ に属する固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ である．

よって，$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対角化される．

$$P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

より，

$$\begin{aligned} A^n =& P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ =& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2\cdot(-1)^n \\ -3 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4+6\cdot(-1)^n & -8+8\cdot(-1)^n \\ 3+3\cdot(-1)^{n+1} & 6+4\cdot(-1)^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．よって，

$$A^{2017} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4-6 & -8-8 \\ 3+3 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = A$$

である．【15 点】

別解） $A^2 = I$ より，$A^{2017} = (A^2)^{508}\cdot A = A$.