対称変換を表す行列

直線 $\ell : y = mx$ に関する対称変換は行列

$$\begin{pmatrix} -\frac{m^2-1}{m^2+1} & \frac{2m}{m^2+1} \\ \frac{2m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{m^2+1} \begin{pmatrix} -(m^2-1) & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

によって与えられる．

点 $\mathrm{P}(x, y)$ がこの対称変換によって，点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に移ったとする．つまり，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \frac{1}{m^2+1} \begin{pmatrix} -(m^2-1) & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m^2+1} \begin{pmatrix} -(m^2-1)x + 2my \\ 2mx + (m^2-1)y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

このとき，点 P , Q が直線 ℓ に関して対称であることを示すには

(1) 直線 PQ が ℓ と直交する，すなわち，直線 PQ の傾きが $-\dfrac{1}{m}$ であることと，
(2) 直線 PQ の中点が ℓ 上の点であること

の２つを示せばよい．

(1)

$$\begin{aligned} \frac{y'-y}{x'-x} &= \frac{\frac{2mx+(m^2-1)y}{m^2+1} - y}{\frac{-(m^2-1)x+2my}{m^2+1} - x} = \frac{2mx + (m^2-1)y - (m^2+1)y}{-(m^2-1)x + 2my - (m^2+1)x} \\ &= \frac{2mx - 2y}{-2m^2x + 2my} = \frac{2(mx-y)}{-2m(mx-y)} = -\frac{1}{m}. \end{aligned}$$

(2) 直線 PQ の中点の座標は

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) \\ =&\frac{1}{2(m^2+1)} \left((m^2+1)x - (m^2-1)x + 2my, (m^2+1)y + 2mx + (m^2-1)y\right) \\ =&\frac{1}{2(m^2+1)} \left(2x + 2my, 2m^2y + 2mx\right) \\ =&\frac{1}{m^2+1} \left(x + my, m(x+my)\right) \end{aligned}$$

となり，これは $y = mx$ 上の点となることがわかる．（証明終わり）

対称変換を表す行列

対称変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

と表すことができる．

(0.1) 式に $m = \tan\dfrac{\theta}{2}$ を代入すると，

$$\begin{aligned} -\frac{m^2-1}{m^2+1} &= -\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}-1}{\tan^2\frac{\theta}{2}+1} = -\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta, \\ \frac{2m}{m^2+1} &= \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{\tan^2\frac{\theta}{2}+1} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= 2\sin\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\theta}{2} = \sin\theta \end{aligned}$$

となり，(0.2) 式を得る．なお，上の式変形では

- $\tan\alpha$ の定義；$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- 三角関数の性質； $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- 加法定理；

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta \end{aligned}$$

を用いている．