微分積分学 I

科 目 名 微分法 出 題 者 名 佐藤 弘康

**1** 次の極限値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+5x+4}{x+1}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+4)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x+4)$$
$$=-1+3$$
$$=\mathbf{3}$$ 【5 点】

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(x+1)-2}{2(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{2(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{2(x+1)}$$
$$=\frac{1}{2(1+1)}$$
$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$ 【5 点】

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}-2}{x+2}$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt{2-x}-2)(\sqrt{2-x}+2)}{(x+2)(\sqrt{2-x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{-(x+2)}{(x+2)(\sqrt{2-x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{-1}{\sqrt{2-x}+2}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{2+2}+2}$$
$$=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$ 【5 点】

**2** 「関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$」の定義式を書きなさい.

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ 【5 点】

**3** 次の関数 $y$ の導関数を求めなさい.

(1) $y=3x^4-2x^3+5x+3$

$y'=12x^3-6x^2+5$ 【5 点】

(2) $y=(3-2x)^5$

$$y'=5(3-2x)^{5-1}\times(-2)$$
$$=-10(3-2x)^4$$ 【5 点】

(3) $y=\sqrt{5x-2}$

$$y'=\frac{5}{2\sqrt{5x-2}}$$ 【5 点】

(4) $y=e^{2x+1}$

$y'=2e^{2x+1}$ 【5 点】

(5) $y=\log(2x+5)$

$$y'=\frac{2}{2x+5}$$ 【5 点】

(6) $y=\sin(4-3x)$

$y'=\cos(4-3x)\times(4-3x)'=-3\cos(4-3x)$ 【5 点】

(7) $y = \dfrac{x+7}{x^2-3}$

$$\begin{aligned} y' =& \frac{(x^2-3)-(x+7)\times 2x}{(x^2-3)^2} \\ =& \frac{-x^2-14x-3}{(x^2-3)^2} \\ =& -\frac{x^2+14x+3}{(x^2-3)^2} \quad 【5 点】 \end{aligned}$$

(8) $y = (x^2+3)\sqrt{2x+1}$

$$\begin{aligned} y' =& 2x\sqrt{2x+1} + (x^2+3)\times\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\times 2 \\ =& 2x\sqrt{2x+1} + \frac{x^2+3}{\sqrt{2x+1}} \\ =& \frac{2x(2x+1)+x^2+3}{\sqrt{2x+1}} \\ =& \frac{5x^2+2x+3}{\sqrt{2x+1}} \quad 【5 点】 \end{aligned}$$

(9) $y = \log(\sin x)$

$$y' = \frac{1}{\tan x} = \cot x \quad 【5 点】$$

(10) $y = \cos^2 x$

$$\begin{aligned} y' =& 2\cos x \times (-\sin x) \\ =& -2\sin x\cos x \\ =& -\sin 2x \quad 【5 点】 \end{aligned}$$

(11) $y = \sin^{-1}(2x)$

$$\begin{aligned} y' =& \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\times(2x)' \\ =& \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \quad 【5 点】 \end{aligned}$$

(12) $y = (x^2+2x)\tan(3x+8)$

$$y' = 2(x+1)\tan(3x+8) + \frac{3x(x+2)}{\cos^2(3x+8)} \quad 【5 点】$$

**4** 対数微分法を用いて $f(x) = \dfrac{(x+3)^2}{\sqrt{2x+1}}$ を微分し，微分係数 $f'(4)$ を求めなさい．

$x=4$ の近傍で $2x+1$ も $x+3$ の正なので，

$$\log f(x) = 2\log(x+3) - \frac{1}{2}\log(2x+1).$$

両辺を微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} =& \frac{2}{x+3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1} \\ =& \frac{2}{x+3} - \frac{1}{2x+1} = \frac{3x-1}{(x+3)(2x+1)}. \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} f'(x) =& f(x)\cdot\frac{3x-1}{(x+3)(2x+1)} \\ =& \frac{(x+3)(3x-1)}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}. \end{aligned}$$

$$\therefore\ f'(4) = \frac{7\times 11}{9\sqrt{9}} = \mathbf{\frac{77}{27}}. \quad 【5 点】$$

注意：対数微分法を用いていなければ加点しない．

**5** 関数 $f(x) = x^4 + 4x^3$ の極値を求めなさい．

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3)$$

$$f''(x) = 12x^2 + 24x = 12x(x+2)$$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = -3, 0$，$f''(x) = 0$ となるのは $x = -2, 0$ である．増減表は

| $x$ | | $-3$ | | $-2$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $-27$ | | $-16$ | | $0$ | |

となる．よって，$x=-3$ のとき極小であり，極小値は $-27$ である（他に極値はない）．【5 点】

注意：$f''(0)=0$ なので，$x=0$ で極値をとるか否かは判定できない．増減表を書くなどして，増減を調べていなければ加点しない．

※ $\boxed{6}$ と $\boxed{7}$ は選択問題です．どちらか一方にのみ答えなさい．【15 点（部分点なし）】

**6** 逆余弦関数 $\cos^{-1} x$ がどのような関数の逆関数か述べなさい．さらに，逆関数の定義と合成関数の微分の公式を用いて，

$$\left(\cos^{-1} x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

を示しなさい．

**7** $x = 0$ を中心とする逆正接関数 $\tan^{-1} x$ の Taylor 級数を 5 次の項まで求めなさい．

$\boxed{6}$ 教科書またはノートを確認せよ．

$\boxed{7}$ $f(x) = \tan^{-1} x$ とおく．

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x^2+1}, \\
f''(x) &= -\frac{2x}{(x^2+1)^2}, \\
f'''(x) &= -\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}, \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{24x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}, \\
f^{(5)}(x) &= \frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(x^2+1)^5},
\end{aligned}$$

であるから，

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(0) = -2, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 24.$$

よって，5 次の項までのマクローリン級数は

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$$

となる．