

次の ① ~ ⑤ の中から 3 つ選んで問に答えなさい。

① 次の複素数を $x + iy$ (ただし, x, y は実数) の形に変形しなさい。

(1) $i^1 + i^2 + \dots + i^n + \dots + i^{1234}$

(2) $i^1 \cdot i^2 \cdot \dots \cdot i^n \cdot \dots \cdot i^{1234}$

② z を実数でない複素数とする (つまり, $z = x + yi, y \neq 0$). このとき, 「 $z + \frac{1}{z}$ が実数」であることと「 $|z| = 1$ 」であることが同値であることを示しなさい。

③ $z = \frac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^{15}}{(-1-\sqrt{3}i)^{20}}$ の絶対値と偏角を求めなさい。

④ $u(x, y) = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ とする. 次の問に答えなさい。

(1) $u(x, y)$ が調和関数であることを示しなさい。

(2) $f(x + yi) = u(x, y) + i v(x, y)$ が正則関数となるような $v(x, y)$ をすべて求めなさい。

⑤ $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ と定義する. このとき, 次の問に答えなさい。

(1) $\tan(x + yi)$ の実部と虚部を求めなさい。

(2) $\tan z$ がコーシー・リーマンの関係式を満たすことを示しなさい。