科 目 名 複素関数論　　出 題 者 名 佐藤 弘康

1 次の複素数 z の絶対値 $|z|$ と偏角 $\arg(z)$ を求めなさい．

(1) $\sqrt{6}+\sqrt{2}i$

$$
\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{z\cdot\bar{z}} = \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2}i)(\sqrt{6}-\sqrt{2}i)} \\
&= \sqrt{6-2\cdot i^2} = \sqrt{8} = \mathbf{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

また，$\dfrac{z}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ より，$\arg(z) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$.

(2) $-3i$

$$|z| = \mathbf{3}, \qquad \arg(z) = \boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$$

(3) e^{2i}

$$|z| = \mathbf{1}, \qquad \arg(z) = \mathbf{2}$$

(4) $\dfrac{(\sqrt{3}i+1)^{20}}{(1+i)^{18}}$

$u=\sqrt{3}i+1,\ v=1+i$ とおくと，$z=\dfrac{u^{20}}{v^{18}}$.

$|u|=2, \arg u = \dfrac{\pi}{3}$. $|v|=\sqrt{2}, \arg u = \dfrac{\pi}{4}$. よって，

$$
\begin{aligned}
|z| &= \frac{|u|^{20}}{|v|^{18}} = \frac{2^{20}}{\sqrt{2}^{18}} = \frac{2^{20}}{2^{9}} = \mathbf{2^{11}} \quad (\mathbf{2048}), \\
\arg z &= \frac{\pi}{3}\times 20 - \frac{\pi}{4}\times 18 \\
&= \frac{20\pi}{3} - \frac{9\pi}{2} = \frac{40\pi-27\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{13\pi}{6}} \quad \left(\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}\right).
\end{aligned}
$$

2 次の複素関数のすべての極とその位数を答えなさい．

(1) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+3)^2}$

特異点は 1 と -3, 位数はそれぞれ 1 と 2 である．

(2) $f(z) = \dfrac{(z-3)^3}{(z+1)(z^2+1)}$

特異点は $-1, i$ と $-i$, 位数はすべて 1 である．

(3) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

ローラン展開すると，

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$$

となる．よって，特異点は原点のみだが，これは真性特異点である（極は存在しない）．

(4) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$

$\sin z$ のテイラー展開公式より，

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^3}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots\right) \\
&= \frac{g(z)}{z^2}
\end{aligned}
$$

と書ける．$g(z)$ は正則関数で，$g(0)=1\neq 0$ であるから，$f(z)$ の特異点は原点のみで，その位数は 2 である．

3 次の複素関数 $f(z)$ と曲線 C に対し，複素積分

$$\int_C f(z)\,dz$$

を求めなさい．

(1) $f(z) = (1+2z)^2, \quad C: z = ti \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

$f(z)$ は正則関数で，原始関数は

$$F(z) = \frac{1}{6}(1+2z)^3$$

である．C の始点は原点で，終点は i なので

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz =& F(i) - F(0) = \frac{1}{6}(1+2i)^3 - \frac{1}{6} \\
=& \frac{2i}{6}\left\{(1+2i)^2 + (1+2i) + 1\right\} \\
=& \frac{i}{3}(1+4i-4+1+2i+1) \\
=& \frac{i}{3}(6i-1) \\
=& -\boldsymbol{\frac{1}{3}(6+i)}.
\end{aligned}$$

(2) $f(z) = \bar{z}, \quad C: z = (1+i)t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

$f(z)$ は正則関数ではなく，原始関数は存在しない．よって，線積分の定義に従って計算する．$dz = (1+i)\,dt$ なので，

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz =& \int_0^1 \overline{(1+i)t}\,(1+i)\,dt \\
=& \int_0^1 (1-i)(1+i)t\,dt \\
=& 2\int_0^1 t\,dt \\
=& 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

(3) $f(z) = z^4 + 3z^2 - z + 4, \quad C: |z| = 1$

$f(z)$ は複素数平面上で正則である．C は単一閉曲線なので，コーシーの定理より，線積分の値は $\mathbf{0}$ である．

(4) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2(z-2)}, \quad C: |z| = 3$

原点を中心とする半径 3 の円の内部にある $f(x)$ の特異点は -1 と 2 で，位数はそれぞれ 2 と 1 である．よって留数定理より

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz =& 2\pi i\,(\mathrm{Res}[f,-1] + \mathrm{Res}[f,2]) \\
=& 2\pi i\left(\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}(z+1)^2 f(z) + \lim_{z\to 2}(z-2)f(z)\right) \\
=& 2\pi i\left(\lim_{z\to -1}\frac{-2}{(z-2)^2} + \lim_{z\to 2}\frac{z}{(z+1)^2}\right) \\
=& 2\pi i\left(\frac{-2}{(-1-2)^2} + \frac{2}{(2+1)^2}\right) \\
=& \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

(5) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2(z-4)}, \quad C: |z| = 3$

原点を中心とする半径 3 の円の内部にある $f(x)$ の特異点は原点のみで，位数は 2 である．よって留数定理より

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz =& 2\pi i\,\mathrm{Res}[f,0] \\
=& 2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}z^2 f(z) \\
=& 2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{-6}{(z-4)^2} \\
=& 2\pi i\cdot\frac{-6}{16} \\
=& -\boldsymbol{\frac{3\pi i}{4}}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{4}}$ $a > 1$ とする．$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{a+\cos\theta} d\theta = 2\pi \cdot \frac{\left(\sqrt{a^2-1}-a\right)^n}{\sqrt{a^2-1}}$$

であることを示しなさい．

$z = e^{i\theta}$ とおけば, $\cos n\theta = \mathrm{Re}(z^n)$ であるから,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{a+\cos\theta} d\theta = \mathrm{Re}\left[\int_0^{2\pi} \frac{z^n}{a+\cos\theta} d\theta\right].$$

よって,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{z^n}{a+\cos\theta} d\theta$$

を求める.

$$\cos\theta = \frac{z-z^{-1}}{2}, \qquad dz = iz\,d\theta,$$

さらに, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ のとき, $z = e^{i\theta}$ は単位円周上を動くので, これを C とおくと

$$\begin{aligned} I =& \int_C \frac{z^n}{a+\frac{z-z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} \\ =& \frac{2}{i}\int_C \frac{z^n}{2az+z^2-1} dz \\ =& \frac{2}{i}\int_C \frac{z^n}{\left\{z-(\sqrt{a^2+1}-a)\right\}\left\{z-(-\sqrt{a^2+1}-a)\right\}}. \end{aligned}$$

ここで, 上式の被積分関数の特異点は $\sqrt{a^2+1}-a$ と $-\sqrt{a^2+1}-a$ だが, $a > 1$ より, 単位円の内部にあるのは, $\sqrt{a^2+1}-a$ のみであり, これは 1 位の極である. よって, 留数定理より,

$$\begin{aligned} I =& \frac{2}{i} \cdot 2\pi\, i\, \mathrm{Res}[f(z), \sqrt{a^2+1}-a] \\ =& 4\pi \lim_{z \to \sqrt{a^2+1}-a} \frac{z^n}{z-(-\sqrt{a^2+1}-a)} \\ =& 4\pi \cdot \frac{(\sqrt{a^2+1}-a)^n}{2\sqrt{a^2+1}} \\ =& 2\pi \cdot \frac{(\sqrt{a^2+1}-a)^n}{\sqrt{a^2+1}}. \end{aligned}$$

この値は実数なので, これが求める積分値である.