科　目　名　**応用数学 II-J**　　**出　題　者　名**　　**佐藤 弘康**

1　微分方程式

$$2y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \qquad (*1)$$

について次の問に答えなさい..

(1) $x^2 + y^2 = cx$ が $(*1)$ の解であることを示しなさい．ただし，c は任意の定数とする．

$$x^2 + y^2 = cx \qquad (*1\text{-}1)$$

の両辺を x で微分すると

$$2x + 2yy' = c \qquad (*1\text{-}2)$$

となる．この 2 式から c を消去すると

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = (2x + 2yy')x &\iff x^2 + y^2 = 2x^2 + 2xyy' \\ &\iff -x^2 + y^2 = 2xyy' \\ &\iff 2y' = \frac{-x^2 + y^2}{xy} \\ &\iff 2y' = -\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \\ &\iff (*1) \end{aligned}$$

よって，$(*1\text{-}1)$ は $(*1)$ の解である．【4 点】

(2) 初期条件 $x = 1, y = 1$ を満たす $(*1)$ の特殊解を求めなさい．

$(*1\text{-}1)$ において，$x = 1, y = 1$ を代入すると，

$$1^2 + 1^2 = c \times 1$$

$$\therefore\ c = 2.$$

よって，求める特殊解は，$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 2x}$.【4 点】

2　微分方程式

$$xy\,dy - (x^2 + y^2)\,dx = 0 \qquad (*2)$$

について次の問に答えなさい．

(1) $(*2)$ が同次形微分方程式であることを示しなさい．

$$\begin{aligned} (*2) &\iff xyy' - (x^2 + y^2) = 0 \\ &\iff xyy' = (x^2 + y^2) \\ &\iff y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \\ &\iff y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \end{aligned}$$

このように，$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ と書けるので，$(*2)$ は同次形である．特に，$f(t) = t + \frac{1}{t}$ である．【4 点】
説明が不明瞭な（または余計な記述がある）場合は 2 点減点.

(2) 変数を適当に変換することにより，$(*2)$ が変数分離形微分方程式

$$xzz' = 1$$

に変換されることを示しなさい．

$z = \frac{y}{x}$ とおくと，$y' = (xz)' = z + x\,z'$ である．これらを

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

に代入すると

$$\begin{aligned} z + xz' = \frac{1}{z} + z &\iff xz' = \frac{1}{z} \\ &\iff xzz' = 1 \end{aligned}$$

となる．【4 点】

(3) $(*2)$ の一般解を求めなさい．

$xz\,z' = 1$ は変数分離形なので，

$$\begin{aligned} xzz' = 1 &\iff xz\frac{dz}{dx} = 1 \\ &\iff \int z\,dz = \int \frac{1}{x}dx \\ &\iff \frac{1}{2}z^2 = \log x + c \\ &\iff z^2 = 2\log x + 2c = \log x^2 + C. \end{aligned}$$

$z = \frac{y}{x}$ を代入することにより，$\boldsymbol{y^2 = x^2(\log x^2 + C)}$ を得る．【4 点】
z の式のままの場合は 2 点減点.

3 次の問に答えなさい.

(1) 次の 4 つの中から 1 階線形微分方程式をすべて選びなさい.

(ア) $y'' - xy' + 2y = 2x^2 + 1$

(イ) $2y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$

(ウ) $y' - y = -x$

(エ) $(x^2 - 2y)dx + (y^2 - 2x)dy = 0$

(ウ) 【4 点】
正答と誤答 1 つの場合は 2 点減点.

(2) ベルヌーイの微分方程式

$$y' + y = xy^3$$

を適当に変数変換して，線形微分方程式に直しなさい.

この方程式は $n = 3$ の場合のベルヌーイの微分方程式である. $z = y^{1-3} = y^{-2} = \dfrac{1}{y^2}$ とおくと，$z' = -\dfrac{2y'}{y^3}$ である. $y' = -\dfrac{1}{2}y^3 z'$ を代入すると，

$$-\frac{1}{2}y^3 z' + y = xy^3 \iff -\frac{1}{2}z' + \frac{1}{y^2} = x$$
$$\iff z' - 2z = -2x$$

となり，これは z に関する線形微分方程式である.【4 点】
誤答の場合でも，変数変換の式と線形方程式になるおおまかな流れを理解していることが判別できる場合は 2 点.

4 微分方程式

$$(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0 \qquad (*4)$$

について次の問に答えなさい.

(1) $(*4)$ が完全でないことを示しなさい.

$P(x, y) = x^2 + y^2$, $Q(x, y) = -2xy$ とおくと，

$$P_y = 2y \neq -2y = Q_x$$

であるから，この微分方程式は完全ではない.【4 点】

(2) $\dfrac{1}{x^2}$ は $(*4)$ の積分因子であることを示しなさい.

$\dfrac{1}{x^2}$ を $(*4)$ の両辺にかけると

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - \frac{2y}{x}\,dy = 0 \qquad (*4\text{-}1)$$

となる. このとき，

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{2y}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2y}{x}\right).$$

よって，$\dfrac{1}{x^2}$ は $(*4)$ の積分因子である.【4 点】

(3) $(*4)$ の一般解を求めなさい.

完全微分方程式 $(*4\text{-}1)$ の一般解を求める.

$$\begin{aligned}
c &= \int_a^x \bar{P}(t, y)\,dt + \int_b^y \bar{Q}(a, t)\,dt \\
&= \int_1^x \bar{P}(t, y)\,dt + \int_0^y \bar{Q}(1, t)\,dt \\
&= \int_1^x \left(1 + \frac{y^2}{t^2}\right) dt + \int_0^y \left(-\frac{2t}{1}\right) dt \\
&= \left[t - \frac{y^2}{t}\right]_1^x - [t^2]_0^y \\
&= x - \frac{y^2}{x} - 1 + y^2 - y^2 \\
&= x - \frac{y^2}{x} - 1 \\
C &= x - \frac{y^2}{x} \qquad \therefore\ \boldsymbol{Cx = x^2 - y^2} \quad 【4 点】
\end{aligned}$$