科 目 名 応用数学 II-J 出 題 者 名 佐藤 弘康

**1** $f(t)=t^2+t-6,\ y=e^{-3x}+2x-3$ とする．このとき，$f(D)y$ を求めなさい．

$$
\begin{aligned}
f(D)y =&(D-2)(D+3)\left[e^{-3x}+2x-3\right]\\
=&(D-2)(D+3)\left[2x-3\right]\\
=&(D^2+D-6)\left[2x-3\right]\\
=&(D-6)\left[2x-3\right]\\
=&2-6(2x-3)\\
=&\mathbf{-12x+20}.\quad【5 点】
\end{aligned}
$$

**2** 次の (1)〜(4) 中から **2 階線形微分方程式**をすべて選びなさい．

(1) $y'+3y=\sqrt{2x^2+1}$

(2) $y''+4y=\sin 3x$

(3) $y''+xy'=e^{2x}$

(4) $y''-y'+2y^2=0$

**(2) と (3)**　【5 点】

上記の 2 つを選んだ場合以外に，正しいものを少なくとも 1 つ選んでいて，かつ正しくないものを多くても 1 つ選んでいる場合は部分点【3 点】とする．ちなみに，(1) は 1 階線形微分方程式である．(4) は $y^2$ の項があるので，線形ではない．

**3** 次の (1)〜(4) 中から 2 階定数係数線形同次微分方程式

$$y''-4y'+4y=0$$

の**一般解**をすべて選びなさい．

(1) $y=c_1x\,e^{2x}+c_2$ ($c_1,c_2$ は任意の定数)

(2) $y=cx\,e^{2x}$ ($c$ は任意の定数)

(3) $y=c_1xe^{2x}+c_2e^{2x}$ ($c_1,c_2$ は任意の定数)

(4) $y=e^{2x}(cx+c)$ ($c$ は任意の定数)

**(3)**　【5 点】

上記の 1 つ以外に，正しくないものを 1 つだけ選んでいる場合は部分点【3 点】とする．ちなみに，(2) と (4) は解であるが，任意定数を 1 つしか含まないので一般解ではない．(1) は 解ではない．

**4** 次の定数係数線形同次微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $y''+2y'+4y=0$

補助方程式は

$$t^2+2t+4=0$$

となり，これは実数解を持たず，解は $t=-1\pm\sqrt{3}i$ である．よって，一般解は

$$y=e^{-x}(c_1\sin\sqrt{3}x+c_2\cos\sqrt{3}x)$$

である．【5 点】

(2) $y''+6y'+9y=0$

補助方程式は

$$0=t^2+6t+9=(t+3)^2$$

となり，これは重解 $t=-3$ をもつので，一般解は

$$\boldsymbol{y=(c_1+c_2x)e^{-3x}}$$

である．【5 点】

(3) $y''+7y'+12y=0$

補助方程式は

$$0=t^2+7t+12=(t+3)(t+4)$$

となり，これは異なる 2 つの実数解 $t=-3,-4$ をもつので（2 点），一般解は

$$\boldsymbol{y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-4x}}$$

である．

**5** 次の計算をしなさい.

(1) $\dfrac{1}{D^2+3D+3}e^{-2x}$

逆演算子の性質

$$f(\alpha)\neq 0 \text{ ならば, } \frac{1}{f(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{f(\alpha)}e^{\alpha x}$$

を用いることにより,

$$\begin{aligned}\frac{1}{D^2+3D+3}e^{-2x} &= \frac{1}{(-2)^2+3\times(-2)+3}e^{-2x}\\ &= \boldsymbol{e^{-2x}}\end{aligned}$$

を得る.【5 点】

(2) $\dfrac{1}{D+3}\cos x$

$$\frac{1}{D+3}e^{ix}=\frac{1}{D+3}(\cos x+i\,\sin x).$$

一方,

$$\begin{aligned}\frac{1}{D+3}e^{ix} &= \frac{1}{i+3}e^{ix}\frac{1}{i+3}(\cos x+i\,\sin x)\\ &= \frac{3-i}{10}(\cos x+i\,\sin x)\\ &= \frac{1}{10}\{(3\cos x+\sin x)+i(\sin x-\cos x)\}.\end{aligned}$$

よって, 2 式の実部を比較することにより,

$$\frac{1}{D+3}\cos x=\boldsymbol{\frac{1}{10}(3\cos x+\sin x)}$$

を得る.【5 点】

(3) $\dfrac{1}{D-1}(x+1)$

逆演算子の展開の方法を用いる.

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{1-D}(x+1)\\ &= -(1+D+D^2+\cdots)(x+1)\\ &= -(x+1+1)\\ &= \boldsymbol{-(x+2)}\end{aligned}$$

を得る.【5 点】

**6** 定数係数線形微分方程式

$$y''-y'-6y=e^{3x}$$

の一般解を求めなさい.

まず, 定数係数線形同次微分方程式

$$y''-y'-6y=0$$

の一般解を求める. 補助方程式は

$$0=t^2-t-6=(t+2)(t-3)$$

となり, 2 つの異なる実数解 $t=-2,3$ をもつので, 一般解は

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}$$

である. 【5 点】

次に

$$y''-y'-6y=e^{3x}$$

の特殊解を逆演算子の計算により求める. この微分方程式は

$$(D^2-D-6)y=e^{3x}$$

と書けるので, 特殊解は

$$\begin{aligned}\frac{1}{(D^2-D-6)}e^{4x} &= \frac{1}{D-3}\cdot\frac{1}{D+2}e^{3x}\\ &= \frac{1}{D-3}\cdot\frac{1}{3+2}e^{3x}\\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{D-(-4)}e^{3x}\\ &= \frac{1}{5}e^{3x}\int e^{-3x}e^{3}dx\\ &= \frac{1}{5}e^{3x}\int dx\\ &= \frac{1}{5}x\,e^{3x}. \quad \text{【5 点】}\end{aligned}$$

よって, 求める一般解は

$$\boldsymbol{\frac{1}{5}x\,e^{3x}+c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}}$$

である.【5 点】