科目名　数学 I-J　　出題者名　佐藤 弘康

1 $\boldsymbol{a}=(x,2,-1)$ と $\boldsymbol{b}=(-2,-4,y)$ が平行になるような x,y を求めなさい．

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行となるのは，$\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ となるときに限る【4 点】．つまり

$$(x,2,-1)=k(-2,-4,y)=(-2k,-4k,ky)$$

より，

$$x=-2k,\quad 2=-4k,\quad -1=ky$$

である．第 2 式より，$k=-\frac{1}{2}$．よって，第 1 式より $x=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{1}$【3 点】，第 2 式より $y=-\frac{1}{k}=\mathbf{2}$ 【3 点】を得る，

2 $\boldsymbol{a}=(1,-1,2,0)$ と $\boldsymbol{b}=(0,-2,1,2)$ に対し，大きさ $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ と内積 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ を求めなさい．さらに，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ の値を求めなさい．

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{6}\quad【5 点】$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{0^2+(-2)^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3\quad【5 点】$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=1\times 0+(-1)\times(-2)+2\times 1+0\times 2=4\quad【5 点】$$

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{3\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{9}\quad【5 点】$$

3 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ から，グラムシュミットの方法によって，正規直交系を作りなさい．

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{a}_1|}\boldsymbol{a}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.\quad【5 点】$$

$$\boldsymbol{u}_2'=\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$$

$$=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\quad【3 点】,$$

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{u}_2'|}\boldsymbol{u}_2'=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.\quad【2 点】$$

$$\boldsymbol{u}_3'=\boldsymbol{a}_3-(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1-(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

【3 点】

$$\boldsymbol{u}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.\quad【2 点】$$

4 集合 $W=\{(a,b,1)\in R^3\mid a,b\in R\}$ が R^3 の部分空間であるか否か判定しなさい．

部分空間ではない．　【5 点】
$\boldsymbol{x}_1=(a_1,b_1,1)$，$\boldsymbol{x}_2=(a_2,b_2,1)$ に対し，$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=(a_1+a_2,b_1+b_2,2)$ となり，第 3 成分が 1 でないので，W のベクトルではない．　【5 点】

5 次の写像 $f : R^2 \longrightarrow R^2$ が線形写像なら，表現行列を求めなさい．線形写像でないなら，その理由を述べなさい．

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \end{pmatrix}$

線形写像である．　【5 点】

表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$．　【5 点】

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ x \end{pmatrix}$

線形写像ではない．　【5 点】

線形写像ならば，任意の実数 k に対して，$f(k\boldsymbol{x}) = k\,f(\boldsymbol{x})$ が成り立つが，この写像の場合，$k \neq 1$ では成り立たない（別解あり）．　【5 点】

6 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を求めなさい．また，各固有値に対する固有空間を求めなさい．

固有多項式は

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 4 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t - 5 = (t+1)(t-5).$$

よって，固有値は -1 と 5 である．　【2 点】

固有値 -1 に対する固有ベクトルは $k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$【2 点】，

固有値 5 に対する固有ベクトルは $l\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$【2 点】

である（k, l は 0 でない実数）．したがって，固有空間はそれぞれ，

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である（各【2 点】）．

7 2 次形式 $2x^2 - 2xy + 2y^2$ の標準形を求めなさい．

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$　【3 点】

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とおいて，これを直交行列で対角化する．

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -1 \\ -1 & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3).$$

よって，固有値は $1, 3$ である．【3 点】

固有ベクトルはそれぞれ $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$l\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である（各【2 点】）．

したがって，$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，P は直交行列で，$P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ である．　【3 点】

ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P\boldsymbol{X}$ とおくと，

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 - 2xy &= \boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x} = (P\boldsymbol{X})^TAP\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T(P^TAP)\boldsymbol{X} \\ &= \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \underline{X^2 + 3Y^2}. \end{aligned}$$　【2 点】