科 目 名 線形代数学 II　　出 題 者 名 佐藤 弘康

1 次の行列式を求めなさい．

(1) $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$= \mathbf{-11}$　　【1 点】

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 11 \\ 4 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -11 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$

$= -11 \times (7-(-12)) = -11 \times 19 = \mathbf{-209}$　　【1 点】

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 12 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 12 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

$= -3 \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \end{vmatrix} = -3 \times (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$

$= 3 \times 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \times (4-1) = \mathbf{45}$　　【1 点】

2 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えなさい．

(1) A の行列式 $|A|$ を求めなさい．

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{-2}$　　【1 点】

(2) A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めなさい．

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$　　【2 点】

(3) (1)(2) を利用して A の逆行列 A^{-1} を求めなさい．

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　　【1 点】

3 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が表す 1 次変換を f とする．このとき，次の問に答えなさい．

(1) 点 $\mathrm{P}(3, 2)$ の f による像を求めなさい．

$$f(P) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{8} \end{pmatrix} \qquad 【1 点】$$

(2) $f(Q) = (3, 2)$ となる点 Q を求めなさい．

求めるものは $A\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たす (q_1, q_2) である．

A の逆行列は $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} &= A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{9}{8}} \\ \mathbf{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \qquad 【1 点】\end{aligned}$$

4 1 次変換 f によって，点 $(1, 4)$ は点 $(-2, -1)$ に移り，点 $(5, 8)$ は点 $(2, 3)$ に移る．このとき，f の行列を求めなさい．

求めるものは

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$A\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たす行列 A である．上の 2 つの式は

$$A\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

と同値である．$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -24 & 12 \\ -20 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{\frac{5}{3}} & \mathbf{-\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \qquad 【1 点】\end{aligned}$$

5 平面内の直線 $y = 2x - 4$ を原点のまわりに -45° 回転して得られる直線の方程式を求めなさい．

-45° 回転の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 【1 点】$$

である．直線 $y = 2x - 4$ 上の点は $(t, 2t - 4)$ と表されるので，この点を上の行列で変換すると，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t - 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3t - 4 \\ t - 4 \end{pmatrix}$$

つまり，

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(3t - 4)$$
$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - 4)$$

である．この 2 式から，t を消去すると，$X - 3Y = 4\sqrt{2}$ を得る．つまり，直線 $y = 2x - 4$ は -45° 回転すると，直線 $\boldsymbol{x - 3y = 4\sqrt{2}}$ に移る【2 点】．

学籍番号	1	学科	
氏名			