1 行列 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\2&-1&2\end{pmatrix}$ について，次の問に答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ を求めなさい.

$|A|=\mathbf{2}$ 【6 点】

(2) A の余因子行列は $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&-1&a\\b&4&-2\\-1&3&-1\end{pmatrix}$ である．a と b の値を求めなさい.

$a=+|A_{31}|=\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1.$ 【6 点】

$b=-|A_{12}|=\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=0.$ 【6 点】

小行列から求めなくても，$A\widetilde{A}=|A|E$ という性質を用いて導きだしてもよい.

(3) (1)(2) を利用して A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&4&-2\\-1&3&-1\end{pmatrix}$$ 【6 点】

2 行列式 $\begin{vmatrix}1&-1&1&3\\2&0&4&-1\\-1&3&1&-3\\2&5&-1&3\end{vmatrix}$ を求めなさい.

$=140$ 【12 点】

3 行列 $A=\begin{pmatrix}2&-3\\2&1\end{pmatrix}$ が表す 1 次変換を f とする．このとき，次の問に答えなさい.

(1) 点 $\mathrm{P}(-3,2)$ の f による像を求めなさい.

$$f(P)=\begin{pmatrix}2&-3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\-4\end{pmatrix}$$ 【6 点】

(2) $f(Q)=(2,-3)$ となる点 Q を求めなさい.

求めるものは $A\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ を満たす (q_1,q_2) である.

A の逆行列は $\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&3\\-2&2\end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&3\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-7\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{8}\\-\frac{5}{4}\end{pmatrix}$$ 【6 点】

4 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -5 \end{pmatrix}$ について次の問に答えなさい．

(1) A の固有値を求めなさい．

$$\begin{aligned}|A-tE|=&\begin{vmatrix} 1-t & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -5-t \end{vmatrix} \\ =&t^2+4t-32 \\ =&(t+8)(t-4)\end{aligned}$$ 【6 点】

よって，A の固有値は 4 と -8．　【6 点】

(2) ${}^tPAP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めなさい．

固有値 4 に対する固有ベクトルは $k\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$．　【6 点】

固有値 -8 に対する固有ベクトルは $l\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$．　【6 点】

（ただし，k, l は 0 でない任意の実数）．これらの中から大きさ 1 のベクトルを適当に選ぶ．例えば，$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$．

これらを並べて $P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ とすれば，

$${}^tPAP=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

となる．　【6 点】

(3) 行列 A が定める 1 次変換によって，不変な点をすべて求めなさい．

求めるものは，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ を満たすベクトル（点）$\boldsymbol{x}$ である．しかし，A は固有値 1 を持たないので，零ベクトル以外にこの条件を満たすベクトルは存在しない．したがって，行列 A が定める 1 次変換によって，不変な点は原点 O のみである．　【6 点】

(4) 行列 A が定める 1 次変換によって自分自身に移る直線 $y=mx$ をすべて求めなさい．

原点を通り，行列 A の固有ベクトルと平行な直線は，A によって不変である．よって，このような直線は

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x, \quad y=-\sqrt{3}x$$

の 2 つ存在する．各【6 点】

5 平面内の直線 $y=4x-2$ を原点のまわりに 45° 回転して得られる直線の方程式を求めなさい．

45° 回転の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 【6 点】

である．直線 $y=4x-2$ 上の点は $(t, 4t-2)$ と表されるので，この点を上の行列で変換すると，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 4t-2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -3t+2 \\ 5t-2 \end{pmatrix}$$

つまり，

$$\begin{aligned}X&=\frac{1}{\sqrt{2}}(-3t+2) \\ Y&=\frac{1}{\sqrt{2}}(5t-2)\end{aligned}$$

である【6 点】．この 2 式から，t を消去すると，$5X+3Y=2\sqrt{2}$ を得る．つまり，直線 $y=4x-2$ は 45° 回転すると，直線 $5x+3y=2\sqrt{2}$ に移る【6 点】．

$\boxed{6}$ 次の 3 つの条件をすべて満たす 2 次正方行列 A を求めなさい．ただし，f は行列 A が定める 1 次変換とする．

(i) 行列式 $|A|$ の値は -5 である．

(ii) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を満たす点 $\boldsymbol{x}$ が 原点以外に存在する．

(iii) 点 $(1, 2)$ の f による像は $(5, 0)$ である．

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，条件 (i) より，

$$ad - bc = -5 \quad \cdots\cdots \ (1)$$

が成り立つ．条件 (ii) より，A は固有値 1 を持つので，

$$|A - E| = \begin{vmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{vmatrix} = 0,$$

すなわち，

$$ad - bc - (a+d) + 1 = 0 \quad \cdots\cdots \ (2)$$

が成り立つ．(1) と (2) より，

$$a + d = -4 \quad \cdots\cdots \ (3)$$

を得る．条件 (iii) より，

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix},$$

すなわち，

$$a + 2b = 5 \quad \cdots\cdots \ (4)$$

$$c + 2d = 0 \quad \cdots\cdots \ (5)$$

が成り立つ．(3)(4)(5) より，

$$a = -4 - d, \quad b = \frac{1}{2}(5 - a) = \frac{1}{2}(9 + d), \quad c = -2d$$

となり，これらを (1) 式に代入することにより，$d = -1$ を得る．よって，$a = -3$，$b = 4$，$c = 2$．以上のことから，

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

となることがわかる.【15 点（部分点なし）】